

# BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

---

---

ВЕСТНИК  
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

---

NEWS  
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT ELMLƏRİ  
*seriyası*

---

*серия*  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

---

*series of*  
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 1  
2020

## RİYAZİYYAT

УДК 519.634

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.Дж.АЛИЕВ\*, А.Г.АЛИЕВА\*\*

\*Бакинский Государственный Университет

\*\*Институт Математики и Механики НАНА

samed59@bk.ru, arzualiyeva@bk.ru

Доказана теорема существования решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью.

**Ключевые слова:** смешанная задача, метод Фурье, решение почти всюду, априорная оценка.

В работе изучается вопрос существования решения почти всюду следующей многомерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} L(u(t, x)) = \mathcal{F}(u(t, x)) \quad (t \in [0, T], x \in \Omega), \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \quad (2)$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $0 < T < +\infty$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\Omega$  –  $n$ -мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей  $S$ ,  $\Gamma = [0, T] \times S$ ;

$$L(u(t, x)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j} \right) - a(x)u(t, x), \quad (4)$$

причём функции  $a_{ij}(x)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) и  $a(x)$  измеримы и ограничены в  $\Omega$  и в области  $\Omega$  удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), a(x) \geq 0, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0),$$

$\xi_i$  - любые действительные числа;  $\varphi, \psi$  - заданные функции;  $\mathcal{F}$  - некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, а  $u(t, x)$  - искомая функция.

При исследовании решения почти всюду задачи (1)-(3) будем пользоваться приводимыми ниже классами функций  $\mathring{\mathcal{D}}$  и  $\mathring{\mathcal{D}}_1$ , введёнными К.Фридрихсом (см.[8, с.38]).

Замыкание множества всех непрерывно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций в норме  $W_2^1(\Omega)$  назовём классом  $\mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$ . Очевидно, что  $\mathring{\mathcal{D}}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ .

Обозначим через  $\mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$  ( $Q_T \equiv [0, T] \times \Omega$ ) совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в  $\delta$ -окрестности боковой поверхности цилиндра  $Q_T$ , имеющей вид:  $Q_{T, \delta} = [0, T] \times \Omega_\delta$ , где  $\Omega_\delta$  есть совокупность точек  $\Omega$ , удалённых от границы  $\Omega$  на расстояние, не больше  $\delta$ . Замыкание  $\mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$  в норме  $W_2^1(Q_T)$  обозначим  $\mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$ . Очевидно, что  $\mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T) \subset W_2^1(Q_T)$ .

**Определение.** Решением почти всюду задачи (1)-(3) назовём функцию  $u(t, x) \in \mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$ , принадлежащую пространству  $L_2(Q_T)$  вместе со всеми своими производными  $u_i(t, x), u_{x_i}(t, x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $u_{ix_i}(t, x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $u_{x_i x_j}(t, x)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ),  $u_{tt}(t, x), u_{ix_i x_j}(t, x)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в  $Q_T$  и принимающую начальные значения (2) почти всюду в  $\Omega$ .

Следует отметить, что многие задачи теории упругости, в частности, задача о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня, задача о продольном ударе абсолютно твёрдым телом по упруго-вязкому неоднородному стержню конечной длины и переменного сечения, распространение волн в вязко-упругом теле, распространение импульсов вдоль нервных аксонов (нейронов) и др., сводятся к решению смешанных задач для различных частных случаев уравнения (1).

Сначала отметим некоторые работы, связанные с задачей (1)-(3).

В работе [4] рассмотрена смешанная задача для уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \alpha \Delta u(t, x) - \Delta u_t(t, x) = \\ = f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \mathcal{D}u(t, x), \mathcal{D}u_t(t, x), \mathcal{D}^2 u(t, x), \mathcal{D}^2 u_t(t, x)). \end{aligned}$$

При определённых специальных условиях относительно нелинейной функции  $f$  доказано существование решения рассматриваемой задачи при всех  $t > 0$ .

В работе [5] рассмотрена смешанная задача для уравнения

$$u_{tt}(t, x) - \alpha \Delta u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x, u(t, x))$$

с нелинейностью типа  $|u|^{p-1} \cdot u$ . Указаны условия существования глобального слабого решения этой задачи.

Далее, в работах [1,2,3] рассмотрен частный случай задачи (1)-(3), когда оператор  $\mathcal{F}$ , фигурирующий в правой части уравнения (1), является оператором типа функции, порождённым функцией  $f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$ . В работах [1] и [2] исследован вопрос существования и единственности решения почти всюду задачи (1)-(3), а именно, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера для любых размерностей  $n$  доказывается теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях  $T$ ) и единственности в целом (т.е. справедливая для любого конечного значения  $T$ ) решения почти всюду задачи (1)-(3), а с помощью метода априорных оценок для любых размерностей  $n$  доказана теорема существования в целом решения почти всюду задачи (1)-(3). А в работе [3] исследован вопрос существования классического решения задачи (1)-(3) и с помощью принципа сжатых отображений для любых размерностей  $n$  доказывается теорема существования в малом классического решения задачи (1)-(3).

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Как известно, оператор  $L$ , порождённый дифференциальным выражением (4) и краевым условием (3), имеет счётную систему отрицательных собственных чисел

$$0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \dots \geq -\lambda_s^2 \geq \dots \quad (0 < \lambda_s \rightarrow +\infty \text{ при } s \rightarrow \infty)$$

и соответствующую полную ортонормированную в  $L_2(\Omega)$  систему обобщённых собственных функций  $v_s(x)$ , причём под обобщённой собственной функцией  $v_s(x)$  оператора  $L$  понимаем такую не равную тождественно нулю функцию  $v_s(x)$ , которая принадлежит классу  $\mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$  и для любой функции  $\Phi(x)$  из  $\mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v_s(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} + a(x) v_s(x) \Phi(x) \right\} dx = \lambda_s^2 \int_{\Omega} v_s(x) \Phi(x) dx.$$

Очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t) v_s(x), \quad (5)$$

где  $u_s(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \varrho_s(x) dx$  ( $s=1,2,\dots$ ). Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение коэффициентов Фурье  $u_s(t)$  искомого решения почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)-(3) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_s(t) = \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} \left(1 - e^{-\lambda_s^2 t}\right) \psi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(\tau, x)) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}\right] \cdot \varrho_s(x) dx d\tau \quad (s=1,2,\dots; t \in [0, T]), \quad (6)$$

где  $\varphi_s = \int_{\Omega} \varphi(x) \varrho_s(x) dx$ ,  $\psi_s = \int_{\Omega} \psi(x) \varrho_s(x) dx$ .

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3), легко доказывается следующая

**Лемма.** Если  $u(t, x)$  является решением почти всюду задачи (1)-(3) и обобщённые производные  $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x)$  ( $i, j, k = \overline{1, n}$ ) ограничены в  $\Omega$ , то функции  $u_s(t)$  ( $s=1,2,\dots$ ) удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (6).

3. Обозначим через  $B_{\beta_0, \dots, \beta_l}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$  совокупность всех функций  $u(t, x)$  вида (5), рассматриваемых в  $[0, T] \times \Omega$ , для которых все функции  $u_s(t) \in C^{(l)}([0, T])$  и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left( \lambda_s^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_s^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty,$$

где  $\alpha_i \geq 0$ ,  $1 \leq \beta_i \leq 2$  ( $i = \overline{0, l}$ ). Норму в этом множестве определим так:  $\|u\| = J_T(u)$ . Очевидно, что все эти пространства банаховы ([7, с.50]).

4. Примем следующие обозначения:

$$\mathcal{D}(u(t, x), V(t, x)) \equiv \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} + a(x) u(t, x) V(t, x) \right] dx,$$

$$\mathcal{D}(u(t, x), u(t, x)) \equiv \mathcal{D}(u(t, x)) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j} + a(x) u^2(t, x) \right] dx.$$

Тогда очевидно, что для любого  $s$  ( $s=1,2,\dots$ )

$$\mathcal{D}\left(\frac{\varrho_s(x)}{\lambda_s}\right) = \frac{1}{\lambda_s^2} \cdot \mathcal{D}(\varrho_s(x)) = 1.$$

Так как для любого натурального числа  $N$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathcal{D}\left(z(t, x) - \sum_{s=1}^N \mathcal{D}(z(t, x), \frac{1}{\lambda_s} \varphi_s(x)) \cdot \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s}\right) = \\
&= \mathcal{D}(z(t, x)) - 2 \sum_{s=1}^N \left[ \mathcal{D}(z(t, x), \frac{1}{\lambda_s} \varphi_s(x)) \right]^2 + \\
&+ \sum_{s=1}^N \left[ \mathcal{D}(z(t, x), \frac{1}{\lambda_s} \varphi_s(x)) \right]^2 \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s}\right) = \mathcal{D}(z(t, x)) - \sum_{s=1}^N \left[ \mathcal{D}(z(t, x), \frac{1}{\lambda_s} \varphi_s(x)) \right]^2,
\end{aligned}$$

то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[ \mathcal{D}(z(t, x), \frac{1}{\lambda_s} \varphi_s(x)) \right]^2 \leq \mathcal{D}(z(t, x)). \quad (7)$$

Аналогично (7) доказывается справедливость следующего неравенства:

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s \psi_s)^2 \leq \mathcal{D}(\psi(x), \psi(x)). \quad (8)$$

**Теорема.** Пусть

1.  $a_{ij}(x) \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ );  $a(x) \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ ;  $S \in C^3$ ; собственные функции  $\varphi_s(x)$  оператора  $L$  при граничном условии  $\varphi_s(x)|_S = 0$  трижды непрерывно дифференцируемы на  $\overline{\Omega}$ ;  $\varphi(x) \in W_2^3(\Omega)$ ,  $\varphi(x), L\varphi(x) \in \mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$ ;  $\psi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$ .
2. Оператор  $\mathcal{F}$  действует из шара  $\mathcal{K} \left( \|u - W\|_{B_{2,T}^1} \leq R \right)$  в  $L_2(Q_T)$  непрерывно и ограничено, где  $0 < R < +\infty$ ,

$$W(t, x) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} \left[ 1 - e^{-\lambda_s^2 t} \right] \psi_s \right\} \cdot \varphi_s(x).$$

3.  $\frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \sup_{u \in \mathcal{K}} \left\{ \|\mathcal{F}(u)\|_{L_2(Q_T)} \right\} \leq R$ .

4. Для каждого  $u \in \mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$   $\mathcal{F}(u) \in \mathring{\mathcal{D}}_1(Q_T)$ .

Тогда задача (1)-(3) имеет решение почти всюду.

**Доказательство.** Сначала примем следующие обозначения:

$$\mathcal{P}(u(t, x)) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_{\Omega} u(\tau, \xi) \varphi_s(\xi) \cdot \left[ 1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)} \right] d\xi d\tau \cdot \varphi_s(x), \quad (9)$$

$$Q(u(t, x)) \equiv W(t, x) + \mathcal{F}(u(t, x)). \quad (10)$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что  $W(t, x) \in B_{2,T}^1$ . Если для каждого  $u(t, x) \in \mathcal{K}$  обозначить  $\mathcal{F}(u(t, x)) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{u}_s(t) \varphi_s(x)$ , где

$$\tilde{u}_s(t) = \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \varphi_s(\xi) \cdot [1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}] d\xi d\tau,$$

то легко получить, что для любых натуральных  $s, N$  и для любых  $u \in \mathcal{K}$ ,  $t \in [0, T]$ :

$$|\tilde{u}_s(t)| \leq \frac{1}{\lambda_s^2} \cdot \sqrt{T} \cdot a_0, \quad |\tilde{u}'_s(t)| \leq \sqrt{T} \cdot a_0, \quad (11)$$

$$\left\{ \sum_{s=N}^{\infty} \left( \lambda_s \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}_s(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{F}(u(t, x))]^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot a_0, \quad (12)$$

где  $a_0 \equiv \sup_{u \in \mathcal{K}} \left\{ \|\mathcal{F}(u)\|_{L_2(Q_T)} \right\}$ .

Из соотношений (11) и (12), в силу теоремы 1.1 работы [6, с.45] о критерии компактности множеств в пространствах  $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ , следует компактность множества  $\mathcal{F}\mathcal{K}$  в  $B_{2,T}^1$ .

Далее, для любых  $u, v \in \mathcal{K}$  имеем:

$$\|Q(u) - W\|_{B_{2,T}^1} \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \|\mathcal{F}(u)\|_{L_2(Q_T)} \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot a_0 \leq R, \quad (13)$$

$$\|Q(u) - Q(v)\|_{B_{2,T}^1} \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(Q_T)}, \quad (14)$$

где оператор  $Q$  определён соотношением (10).

Из (13) видно, что оператор  $Q$  преобразует шар  $\mathcal{K}$  в себя, а из (14) следует непрерывность оператора  $Q$  в шаре  $\mathcal{K}$ . Таким образом, оператор  $Q$  вполне непрерывно преобразует шар  $\mathcal{K}$  в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера, оператор  $Q$  имеет в шаре  $\mathcal{K} \subset B_{2,T}^1$  по крайней мере одну неподвижную точку  $u(t, x)$ . По определению оператора  $Q$ :

$$u = Q(u).$$

Из (9) и (10) видно, что  $u_s(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \varphi_s(x) dx$ , т.е. коэффициенты Фурье функции  $u(t, x)$  по системе  $\{\varphi_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$  удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (6). Пользуясь этим, покажем, что найденная функция  $u(t, x) =$

$= \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t) \varphi_s(x)$  является решением почти всюду задачи (1)-(3). Легко

показать, что  $u(t, x) \in \mathcal{D}_1(Q_T)$ . Тогда, в силу условия 4 данной теоремы,

$\mathcal{F}(u(t, x)) \in \mathcal{D}_1(Q_T)$ . Пользуясь этим и соотношением  $L\varphi_s(x) = -\lambda_s^2 \varphi_s(x)$

преобразуем (интегрируя по частям) систему (6) к следующему виду:

$$u_s(t) = \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} (1 - e^{-\lambda_s^2 t}) \psi_s + \frac{1}{\lambda_s^3} \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{F}(u(\tau, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right) + a(x) \mathcal{F}(u(\tau, x)) \cdot \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right] \cdot [1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}] dx d\tau, \quad s=1,2,\dots; \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Из (15), пользуясь неравенствами (8) (для функций  $\psi(x)$ ,  $L\varphi(x)$ ) и (7) (для функции  $z(t, x) = \mathcal{F}(u(t, x))$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \left( \lambda_s^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_s(t)| \right)^2 &\leq 3 \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s^3 \cdot \varphi_s)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s \cdot \psi_s)^2 + T \cdot \int_0^T \sum_{s=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right) + a(x) \mathcal{F}(u(\tau, x)) \cdot \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right] dx \Big)^2 d\tau \Big\} \leq \\ &\leq 3 \cdot \left\{ \mathcal{D}(L\varphi(x), L\varphi(x)) + \mathcal{D}(\psi(x), \psi(x)) + T \cdot \int_0^T \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \mathcal{D} \left( \mathcal{F}(u(\tau, x)), \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right) \right]^2 d\tau \right\} \leq \\ &\leq 3 \cdot \left\{ \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_j} + a(x) (L\varphi(x))^2 \right] dx + \right. \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} + a(x) \psi^2(x) \right] dx + T \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_i} \cdot \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_j} + a(x) (\mathcal{F}(u(\tau, x)))^2 \right] dx d\tau \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \left( \lambda_s^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_s(t)| \right)^2 &\leq 2 \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s^2 \cdot \psi_s)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{s=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_i} \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right) + a(x) \mathcal{F}(u(\tau, x)) \cdot \frac{\varphi_s(x)}{\lambda_s} \right] dx \Big)^2 d\tau \right\} \leq 2 \cdot \|L\psi(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \mathcal{D} \left( \mathcal{F}(u(\tau, x)), \frac{\varrho_s(x)}{\lambda_s} \right) \right]^2 d\tau \left\} \leq 2 \cdot \left\{ \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \right) - a(x) \psi(x) \right]^2 dx + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau, x))}{\partial x_j} + a(x) (\mathcal{F}(u(\tau, x)))^2 \right] dx d\tau \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (16) и (17) следует, что  $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$ .

Примем следующие обозначения:

$$u_{p,q}(t, x) = \sum_{s=p}^q u_s(t) \varrho_s(x) \quad (1 \leq p \leq q).$$

Теперь, пользуясь неравенством (18) (для  $k=0,1,2,3$ ) и неравенством (21) (для  $r=1$ ) из [8, с.84, 88], получаем, что для любых  $t \in [0, T]$  и  $1 \leq p \leq q$ :

$$\begin{aligned}
& \|u_{p,q}(t, x)\|_{W_2^3(\Omega)}^2 \leq C_1 \cdot \{J_0(u_{p,q}) + J_1(u_{p,q}) + J_2(u_{p,q}) + J_3(u_{p,q})\} \leq \\
& \leq C_2 \cdot \{J_0(u_{p,q}) + J_0(Lu_{p,q}) + J_1(u_{p,q}) + J_1(Lu_{p,q})\} = C_2 \cdot \left\{ \int_{\Omega} u_{p,q}^2(t, x) dx + \right. \\
& + \int_{\Omega} (Lu_{p,q}(t, x))^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_{p,q}(t, x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_{p,q}(t, x)}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \times \\
& \times \frac{\partial Lu_{p,q}(t, x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial Lu_{p,q}(t, x)}{\partial x_j} dx \left. \right\} \leq C_2 \cdot \left\{ \sum_{s=p}^q u_s^2(t) + \sum_{s=p}^q (\lambda_s^2 \cdot u_s(t))^2 + \sum_{s=p}^q \lambda_s^2 \cdot u_s^2(t) + \right. \\
& \left. + \sum_{s=p}^q (\lambda_s^3 \cdot u_s(t))^2 \right\} \leq C_2 \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_1^6} + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_1^4} + 1 \right\} \cdot \sum_{s=p}^q \left( \lambda_s^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_s(t)| \right)^2, \quad (18)
\end{aligned}$$

где  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  - некоторые постоянные числа.

Из (18), в силу сходимости числового ряда  $\sum_{s=1}^{\infty} \left( \lambda_s^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_s(t)| \right)^2$ ,

следует, что  $\|u_{p,q}(t, x)\|_{W_2^3(\Omega)} \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, T]$  при  $p, q \rightarrow +\infty$ .

Следовательно, ряд  $u(t, x) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t) \varrho_s(x)$  и ряды, полученные его почленным дифференцированием по  $x_1, \dots, x_n$  три раза, сходятся в  $L_2(\Omega)$  равномерно относительно  $t \in [0, T]$ .

Далее, пользуясь неравенством (18) (для  $k=0,1,2$ ) и неравенством (21) (для  $r=1$ ) из [8, с.84, 88], получаем, что для любых  $t \in [0, T]$  и  $1 \leq p \leq q$ :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t} \right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \cdot \left\{ J_0 \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) + J_1 \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) + J_2 \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) \right\} \leq C_4 \cdot \left\{ J_0 \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) + \right. \\
& + J_0 \left( L \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) \right) + J_1 \left( \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \right) \left. \right\} \leq C_4 \cdot \left\{ \sum_{s=p}^q (u'_s(t))^2 + \sum_{s=p}^q (\lambda_s^2 \cdot u'_s(t))^2 + \right. \\
& \left. + \sum_{s=p}^q (\lambda_s \cdot u'_s(t))^2 \right\} \leq C_4 \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_1^4} + 1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right\} \cdot \sum_{s=p}^q \left( \lambda_s^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_s(t)| \right)^2, \quad (19)
\end{aligned}$$

где  $C_3 > 0$ ,  $C_4 > 0$  - некоторые постоянные числа.

Из (19), в силу сходимости числового ряда  $\sum_{s=1}^{\infty} \left( \lambda_s^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_s(t)| \right)^2$ , сле-

дует, что  $\left\| \frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t} \right\|_{W_2^2(\Omega)} \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, T]$  при  $p, q \rightarrow +\infty$ .

Следовательно, ряд  $u_t(t,x) = \sum_{s=1}^{\infty} u'_s(t) \varphi_s(x)$  и ряды, полученные его почленным дифференцированием по  $x_1, \dots, x_n$  два раза, сходятся в  $L_2(\Omega)$  равномерно относительно  $t \in [0, T]$ .

Как видно из оценок (18) и (19):

$$u(t,x) \in C([0, T]; W_2^3(\Omega)), \quad u_t(t,x) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)).$$

Далее, из системы (6) легко получить, что  $\forall t \in [0, T]$  и натурально-го  $N$ , почти всюду в  $\Omega$ :

$$\frac{\partial^2 u_N(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (L(u_N(t,x))) = \sum_{s=1}^N \left( \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(t,\xi)) \varphi_s(\xi) d\xi \right) \cdot \varphi_s(x), \quad (20)$$

где  $u_N(t,x) = \sum_{s=1}^N u_s(t) \varphi_s(x)$ . Так как  $\forall t \in [0, T]$   $\mathcal{F}(u(t,x)) \in L_2(\Omega)$ , то перейдя к пределу по метрике  $L_2(\Omega)$  в обеих частях (20), получаем, что  $\forall t \in [0, T]$  почти всюду в  $\Omega$ :

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (L(u(t,x))) = \mathcal{F}(u(t,x)).$$

Отсюда следует, что  $u_{tt}(t,x) \in L_2(Q_T)$  и функция  $u(t,x)$  удовлетворяет почти всюду в  $Q_T$  уравнению (1). А начальные условия (2) удовлетворяются в ещё более сильном смысле, а именно:

$$\|u(t,x) - \varphi(x)\|_{W_2^3(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|u_t(t,x) - \psi(x)\|_{W_2^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Таким образом, функция  $u(t,x)$  является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев С.Дж. О существовании в малом и единственности в целом решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. I // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2003, №3, с.36-42.
2. Алиев С.Дж. О глобальном существовании решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. II // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2003, №4, с.35-43.
3. Aliyev S.J., Aliyeva A.Q. The study of multidimensional mixed problem for one class of third order semilinear pseudohyperbolic equations // European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, v.10, No5, p.1078-1091.
4. Ebihara Yukiyoishi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation. III // J.Different.Equat., 1982, v.45, № 3, p.332-355.
5. Tao Yu, Hai-ou Yang. Initial boundary value problem for a a class of strongly damped nonlinear wave equation. Harbin gongcheng daxue xuebao // J. Harbin Eng. Univ., 2004, v.25, № 2, p.254-256.
6. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Многомерная смешанная задача для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка. Баку: Азтехуниверситет, 2012, 252 с.
7. Худавердиев К.И. Многомерная смешанная задача для нелинейных гиперболических уравнений. Баку: Азтехуниверситет, 2011, 611 с.
8. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва: Гостехиздат, 1953, 296 с.

## BİR SINIF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB QEYRI-XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ ÇOXÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN TƏDQIQI

S.C.ƏLİYEV, A.Q.ƏLİYEVƏ

### XÜLASƏ

İşdə sağ tərəfi qeyri-xətti operator olan bir sinif üçüncü tərtib diferensial tənliklər üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

**Açar sözlər:** qarışıq məsələ, Furiye metodu, sanki hər yerdə həll, aprior qiymətləndirmə.

## THE STUDY OF MULTIDIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF THIRD ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.J.ALIYEV, A.Q.ALIYEVA

### SUMMARY

The existence theorem of almost everywhere solution of a multidimensional mixed problem for one class of third order differential equations with nonlinear operator on the right-hand side has been proved.

**Key words:** mixed problem, Fourier method, almost everywhere solution, a priori estimate.

*Поступила в редакцию: 03.02.2020 г.*

*Подписано к печати: 22.10.2020 г.*

UOT 519.633

SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ PARAMETR OLAN STEKLOV TIPLİ  
MƏSƏLƏLƏRİN ƏDƏDİ ÜSULLA HƏLLİN.S.SÜLEYMANOV  
Bakı Dövlət Universiteti  
Bsu.edu.az

*Məhdud oblastda qeyri-lokal sərhəd şərtində Steklov tipli məsələlər araşdırılıb. Bir sərhəd məsələsində məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar hesablanıb.*

**Açar sözlər:** Spektral parametr, analitik həll, ədədi üsullar, qeyri-lokal, məxsusi ədədlər

Sərhəd şərtində spektral parametr olan qeyri-lokal məsələlərin analitik həllini tapmaq çətin və ya mümkün olmur. Ona görə bu tip məsələlərin effektiv həlləri ədədi üsulların köməyiylə olur. Məsələn üçün bu tip məsələlərə [1]-[2]-də baxılmışdır. Son dövrlərdə müəyyən oblastda sərhəd şərtinə parametr daxil olan Steklov tipli məsələlərin məxsusi ədədlərinin hesablanması [3]-də verilmişdir. Burada müəyyən oblastda bu tip məsələləri həll etmək üçün variyasiya integral tənliklərin, kompleks dəyişənlərin üsullarından istifadə edilib.

Qeyd olunan iş [4]-ün davamıdır. Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\Delta U = 0 \quad \text{B } D \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \lambda U, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (3)$$

harada  $D$  -  $n$  ölçülü fəzada məhdud oblastdır, sərhəd iki hissədən ibarətdir:  $\partial D = \Gamma \cup S$ ;

$n$  -  $D$  oblastının sərhəd normalının ortudur. Görmək olar ki, (1)-(3) məsələsi üçün sonsuz sayıda  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  məxsusi ədədləri var və  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  olduqda.

Variyasiya üsullarından məlumdur ki, (1)-(3) məsələsinə aşağıdakı funksionalın min-un tapılmasına ekvivalentdir.

$$F(u) = \frac{\int_D \frac{\partial u}{\partial n} u ds}{\int_{\Gamma} u^2 ds} \quad (4)$$

$$\text{harada ki, } \int_{\Gamma} u dx = 0 \quad (5)$$

ortoqonallıq şərti ödənilməlidir. (4) funksionalı üçün variyasiya məsələsini Rits üsulu ilə həll etmək üçün koordinatlar funksiyası sistemi kimi harmonik polinomları seçək.

$$C_n^m = b_{mn} P_n^m(\cos \theta) \cos m\eta R^n;$$

$$S_n^m = b_{mn} R^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\eta;$$

$$\text{harada ki, } b_{mn} = \frac{2^m m!(n-m)!}{(m+n)!}$$

Polinomlar üçün aşağıdakı rekurent düsturlar doğrudur:

$$C_m^m = r^m \cos m\eta; \quad C_{m+1}^m = x C_m^m;$$

$$S_m^m = r^m \sin m\eta; \quad S_{m+1}^m = x S_m^m;$$

$$S_{m+1}^m = \frac{1}{n+m+1} \left[ (2n+1)x S_n^m - (n-m)R^2 S_{n-1}^m \right];$$

$$C_{m+1}^m = \frac{1}{n+m+1} \left[ (2n+1)x C_n^m - (n-m)R^2 C_{n-1}^m \right];$$

törəmələri üçün isə

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial x} = (n-m)S_{n-1}^m; \quad \frac{\partial C_n^m}{\partial x} = (n-m)C_{n-1}^m;$$

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \left[ n S_n^m - (n-m)x S_{n-1}^m \right] - \frac{z m C_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial z} = \frac{z}{r^2} \left[ n S_n^m - (n-m)x S_{n-1}^m \right] + \frac{y m C_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \left[ n C_n^m - (n-m)x C_{n-1}^m \right] + \frac{z m S_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial z} = \frac{z}{r^2} \left[ n C_n^m - (n-m)x C_{n-1}^m \right] - \frac{y m S_n^m}{r^2};$$

harada ki,  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ;  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Məxsusi ədədləri aşağıdakı tənlikdən təyin edək:

$$\det(a_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = 0 \quad (6)$$

$\alpha_{ij}$  və  $\beta_{ij}$  konkret formula ilə təyin olunur.

Qeyd olunan alqoritm (4) məsələsinin həllinin S sərhəd şərtində ödəməsi üçün əvvəlcədən təyin olunan sistem koordinat funksiyalarının qurulmasına əsaslanır. Deməli,  $\Gamma$  sərhəd şərtini ödəyən Laplas tənliyinin həllini də tapmaq olar.

Tutaq ki,  $\Gamma$  səthini saxlayan hər hansı D oblastında ikiqat kəsilməz diferensiallanan  $u(x, y, z)$  harmonik funksiyası verilib və aşağıdakı şərti ödəyir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu u \text{ при } x = 0, \quad (7)$$

$$\text{harada ki, } u(x, y, z) = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} + \mu \psi(x, y, z) \quad (8)$$

$$\psi(0, y, z)|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

$\psi(x, y, z)$ - x dəyişəninə görə üçqat, y və z argumentlərinə görə isə ikiqat kəsilməz diferensiallanan, harmonik funksiyadır.  $\psi(x, y, z)$  funksiyasını və  $\mu$  parametrini tapmaq üçün aşağıdakı funksionalının minimumunun tapılması məsələsini alırız

$$K(u) = \frac{\int_D \left( \nabla \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dD + 2\mu \int_{S+\Gamma} \left( \nabla \frac{\partial \psi}{\partial x}, \nabla \psi \right) dD + \mu^2 \int_{S+\Gamma} (\nabla \psi)^2 dD}{\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dS} \quad (10)$$

$\psi(x, y, z)$  funksiyası D oblastında harmonikdir və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\psi(0, y, z)|_{\Gamma} = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} ds = 0 \quad (12)$$

Qeyd olunan parametr isə həmin funksionalının minimumunun zəruri şərtindən alınır.

$$\frac{\partial k(u)}{\partial \mu} = 0 \quad (13)$$

Buradan çıxır ki,

$$\int_D \left( \nabla \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \psi \right), \nabla \psi \right) dD = \int_D \nabla u \nabla \psi dD = 0 \quad (14)$$

$\mu$  parametrinin verilmiş qiymətində Rits üsulundan istifadə etsək, məsələnin axtarılan həlli aşağıdakı cəm şəklində tapılır:

$$\Psi^N = \sum_{k=1}^N a_k W_k \quad (15)$$

Burada  $a_k$  - sabitlərdir və (10) funksionalının zəruri şərtlərindən

$$\frac{\partial K(u)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

aşığıdaki cəbri tənliklər sistemini alırıq

$$\sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}(\mu) - \lambda(\mu)\beta_{ij})a_j = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (17)$$

harada ki,  $\alpha_{ij}(\mu) = \alpha_{ij}^{(1)} + 2\mu\alpha_{ij}^{(2)} + \mu^2\alpha_{ij}^{(3)}$ ,

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int_S \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial n} \frac{\partial W_i}{\partial x} ds, \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \int_S \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial n} W_i ds + \int_S \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial n} W_i ds \right);$$

$$\alpha_{ij}^{(3)} = \int_S \frac{\partial W_i}{\partial n} \frac{\partial W_j}{\partial n} ds, \quad \beta_{ij} = \int_{\Gamma} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_j}{\partial x} ds;$$

$\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}, \beta_{ij}$  - kafi sayda nöqtələrdə inteqralın təqribi hesablanması üçün Qaus və düzbucaqlılar üsulu vasitəsilə analoji hesablanır.

(17) sistemini aşığıdaki kimi yazmaq olar:

$$(A_1 + 2\mu A_2 + \mu^2 A_3 - \lambda B)x = 0, \quad (18)$$

harada  $A_1, A_2, A_3, B$  -  $\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}, \beta_{ij}$ ; - əmsallarından ibarət matrisdir,  $\mu$  - verilmiş parametrdir  $\lambda$  - axtarılan parametrdir,  $x$  - isə  $\alpha_j$  - dan ibarət sütundur.

Rits üsulunda biz əmsallara heç bir məhdudiyət qoymadıq. Amma, demək olar ki, (4) funksionalının minumumu (10) funksionalının minumundan çox deyil. Amma (7) şərti birinci halda təqribi, ikinci halda isə dəqiq ödənilir. İkinci şərt isə hər iki halda təqribi ödənilir.  $\mu$  parametrinin qiymətini tapmaq üçün cəbri tənliklər sisteminə aşığıdaki tənliyi əlavə etmək lazımdır.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha_{ij}^{(2)} a_i a_j + \mu \alpha_{ij}^{(3)} a_i a_j) = 0, \quad (19)$$

hansı ki, (16) şərtindən alınır. Müəyyən hesablamalardan sonra  $\mu, \lambda$  arasında aşığıdaki əlaqəni almaq olar.

$$\lambda = \mu + \frac{\int \frac{\partial u}{\partial n} u ds}{\int_{\Gamma} u^2 ds}, \quad (20)$$

Deməli, əgər  $S$  səthində  $\frac{\partial u}{\partial n}$  qismən sıfırdan fərqli olsa, onda  $\lambda$  məxsusi ədədi  $\mu$  parametrinin qiymətinə yaxın olur. Ona görə (18) matris məsələsində  $\mu = \lambda$  yazsaq, aşığıdaki məxsusi ədədlərin hesablanması məsələsinin həll edilməsinə gələrik.

$$(A_1 + 2\lambda A_2 + \lambda^2 A_3 - \lambda B)x = 0,$$

Burada (1)-(3) məsələsinin tapılmış təqribi həlli  $\Gamma$  sərhəd şərtini dəqiq ödəyəcəyəm.

Deməli, qeyd olunan variyasiya üsulunun modifikasiya olunmuş variantından istifadə etməklə dəqiq həllə yaxın olan təqribi həlli tapmaq olar. Qeyd edək ki, bu modifikasiya olunmuş alqoritm vasitəsilə alınmış məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar əvvəlki variantlara nisbətən daha dəqiqdir, istifadə olunan yaddaş sahəsi, kompüterdə realizə olunma vaxtı daha effektivdir. Tərtib olunan proqramlar C++ dilində yazılmışdır.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Итоги науки и техники, математической анализ, т.14 ВИНТИ, 1997, с. 5-58.
2. Комаренко А.Н., Луковский И.А., Фешенко С.Ф. К задаче собственных значениях с параметром в краевых условиях УМЖ, 1965, ИБ, с. 22-30.
3. Dittmar Bodo. Uber Steklofsche Eigenwerte wiss. Pad. Hochsch N.K. Krupskaya, Hall-Kotlen 1988, 26, N 8, с. 3-8.
4. Сулейманов Н.С., Гусейнов Э.А. Нелокальные задачи со спектральным параметром в краевых условиях. Известия СГУ, том 2, №1, 2002.

#### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Н.С.СУЛЕЙМАНОВ

#### РЕЗЮМЕ

Исследованы краевые задачи типа Стеклова в ограниченной области с нелокальными граничными условиями. На примере одной граничной задачи вычисляются собственные значения и собственной функций.

**Ключевые слова:** спектральный параметр, аналитическое решение нелокальные, численные методы.

#### THE ANALYTICAL SOLUTION OF TASKS WITH SPECTRAL PARAMETER IN REGIONAL CONDITIONS BY MEANS OF NUMERICAL METHODS

N.S.SULEYMANOV

#### SUMMARY

Boundary problems of Steklov type are investigated in a bounded domain with nonlocal boundary conditions. In the example of one boundary value problem the eigenvalues and eigenfunctions are calculated.

**Keywords:** analytical solution, spectral parameter, numerical methods, nonlocal, eigenvalues.

*Redaksiyaya daxil oldu: 03.02.2020-ci il*

*Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il*



УДК 517977.56

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО СЛУЧАЯ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ****С.Т.АЛИЕВА***Бакинский Государственный Университет*  
*saadata@mail.ru*

*В работе изучается одна граничная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами при наличии функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Доказан аналог дискретного условия максимума. Исследован особый случай, т.е. случай вырождения дискретного принципа максимума.*

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, допустимое управление, условие оптимальности, особое управление, дискретный принцип максимума.

Начиная середины 60-х годов XX века внимание многих специалистов начали привлекать многопараметрические, в частности, двухпараметрические дискретные системы управления, которые в приложениях моделируют проблемы фильтрации цифровых массивов данных обработки и визуализации изображений различной природы, возникают в теории клеточных машин и др (см. например [1-4]).

Все это диктует качественной создание теории экстремальных задач в многопараметрических и в частности, двухпараметрических системах управления. Одним из первых работ посвященной выводу условий оптимальности в дискретных двухпараметрических задачах управления, представляющий собой дискретный аналог системы Гурса-Дарбу, является статья О.В.Васильева и Ф.М.Кирилловой [5]. В [6] были получены различные необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, а в установлен аналог принципа квазимаксима Габасова-Кирилловой.

Разработка теории особых управлений в дискретных двухпараметрических системах представляющие собой дискретный аналог системы Гурса-Дарбу начинается с работ [7, 8] К.Б.Мансимова.

Во всех этих работах предполагалась, что управляющие функции входят в правую часть системы, уравнений. Между тем среди задач опти-

мального управления системами с распределенными параметрами большой интерес вызывает также задачи управления, в которых управляющие функции, являясь сосредоточенными входят в граничные условия (см. напр. [9]). Такие задачи управления называются граничными задачами управления.

В работах [10-13] получены ряд необходимых условий оптимальности в граничной задаче управления дискретными двухпараметрическими системами без функциональных ограничений на состояние системы.

Исходя из этого, в работе изучается одна граничная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами при наличии функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Доказан аналог дискретного условия максимума и исследован случай его вырождения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S_0(u) = \varphi_1^{(0)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(0)}(z(t_1, x_1)), \quad (1)$$

при ограничении

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\} = X, \quad (2)$$

$$S_i(u) = \varphi_1^{(i)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad (3)$$

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1)),$$

$$(t, x) \in D = T \times X =$$

$$= \{(t, x) : t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}, \quad (4)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X \cup x_1, \quad z(t, x_0) = b(t), \quad t \in T \cup t_1,$$

$$a(x_0) = b(t_0),$$

$$a(x+1) = F(x, a(x), u(x)), \quad x \in X, \quad (5)$$

$$a(x_0) = a_0.$$

Здесь  $u(x)$  –  $r$  – мерный вектор управляющих функций,  $U$  – заданное непустое и ограниченное множество,  $\varphi_j^{(i)}$ ,  $i = \overline{0, s}$ ,  $j = 1, 2$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции,  $f(t, x, z, l, m)$  ( $F(x, a, u)$ ) заданная  $n$  – мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, l, m)$ ,  $(a)$  до второго порядка включительно,  $b(t)$  – заданная  $n$  – мерная дискретная вектор функция,  $a_0$  – заданный постоянный вектор, Управление  $u(x)$  назовем допустимым, если соответствующее ему решение  $(a(x), z(t, x))$  системы (4)-(5) удовлетворяет ограничениям (3).

В работах [10-13] изучена задача типа (1)-(5) без функциональных ограничений и при определенных предположениях доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума. Предлагаемая работа посвящена доказательству аналога дискретного условия максимума и исследовано особого случая.

**Необходимое условие оптимальности. Типа дискретного принципа максимума.** Считая  $(u(x), a(x), z(t, x))$  - фиксированным допустимым процессом, и  $v(x)$  произвольным процессом.

Введем обозначения

$$H(t, x, z, l, m) = \psi_i \cdot f(t, x, z, l, m),$$

$$M(x, a, u, p_i) = p_i' F(x, a, u),$$

$$\Delta_v M^{(i)}[x] \equiv p_i' \Delta_v F[x],$$

$$J(u) = \{0\} \cup I(u), \quad I(u) = \{i : S_i(u(x)) = 0, \quad i = \overline{1, s}\},$$

$$H^{(i)}_z[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial z},$$

$$H^{(i)}_l[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial l},$$

$$H^{(i)}_m[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial m},$$

$$M_a^{(i)}[x] \equiv \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \equiv \frac{\partial M(x, a(x), u(x), p_i(x))}{\partial a},$$

$$\Delta_v M^{(i)}_a[x] \equiv \frac{\Delta_v \partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \equiv \frac{\partial M(x, a(x), v, p_i(x))}{\partial a} - \frac{\partial M(x, a(x), u(x), p_i(x))}{\partial a},$$

Здесь  $\psi_i(t, x)$  и  $p_i(x)$  являются соответственно решениями следующих задач

$$\psi_i(t-1, x-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} + \frac{\partial H^{(i)}[t-1, x]}{\partial l} + \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m},$$

$$\psi_i(t_1-1, x-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l},$$

$$\psi_i(t-1, x_1-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m},$$

$$\psi_i(t_1-1, x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z}; \quad (6)$$

$$p_i(x-1) = \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x-1) - \frac{\partial H^{(i)}[t_0, x]}{\partial l},$$

$$p_i(x_1 - 1) = -\frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} + \psi_i(t_0 - 1, x_1 - 1). \quad (7)$$

Допустим, что множество

$$F(x, a(x), U) = \{\beta : \beta = F(x, a(x), v), v \in U\}, \quad (8)$$

выпукло.

Пусть  $\varepsilon \in [0, 1]$  произвольный число, а  $v(x) \in U, x \in X$  как отмечено в выше произвольный вектор управляющих воздействий.

Через  $(a(x; \varepsilon), z(t, x; \varepsilon))$ - обозначим решение следующей возмущенной системы

$$\begin{aligned} z(t+1, x+1; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon)), \\ z(t_0, x; \varepsilon) &= a(x; \varepsilon), x \in X \cup x_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$z(t, x_0; \varepsilon) = b(t), t \in T \cup t_1,$$

$$a(x_0; \varepsilon) = b(t_0),$$

$$\begin{aligned} a(x+1; \varepsilon) &= F(x, a(x; \varepsilon), u(x; \varepsilon)) \equiv F(x, a(x; \varepsilon), u(x)) + \\ &+ \varepsilon [F(x, a(x; \varepsilon), v(x)) - F(x, a(x; \varepsilon), u(x))] \end{aligned} \quad (10)$$

$$a(x_0; \varepsilon) = a_0.$$

положим по определению

$$y(t, x) = \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \alpha(x) = \frac{\partial a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

$y(t, x)$  и  $\alpha(x)$  являются соответственно решениями следующих задач, соответствующие допустимому процессу  $(u(x), a(x), z(t, x))$

$$y(t+1, x+1) = f_z[t, x]y(t, x) + f_l[t, x]y(t+1, x) + f_m[t, x]y(t, x+1), \quad (11)$$

$$y(t_0, x) = \alpha(x), \quad x \in X \cup x_1,$$

$$y(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1,$$

$$\alpha(x+1) = F_a[x]\alpha(x) + \Delta_{v(x)}F[x], \quad x \in X, \quad (12)$$

$$\alpha(x_0) = 0.$$

Перейдем к вычислению приращения функционала  $S_i(u)$ , соответствующее специальному приращению  $\Delta u(x; \varepsilon) = u(x; \varepsilon) - u(x)$  управления  $u(x)$

При помощи формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned} S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) &= [\varphi_1^{(i)}(a(x_1; \varepsilon)) - \varphi_1^{(i)}(a(x_1))] + \\ &+ [\varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1; \varepsilon)) - \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))] = \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z} (z(t_1, x_1)) y(t_1, x_1) ] + o(\varepsilon). \quad (13)$$

Принимая во внимание (11), (12) формулу приращения (13) можно привести к виду

$$\begin{aligned} S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \varepsilon & \left[ \frac{-\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a} (a(x_1)) \alpha(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z} (z(t_1, x_1)) y(t_1, x_1) + \right. \\ & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x) \alpha(x+1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \alpha(x) + \right. \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \psi_i'(t, x) y(t+1, x+1) - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} y(t, x) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial t} y(t+1, x) - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} y(t, x+1) \right] \right] + o(\varepsilon). \quad (14) \end{aligned}$$

Из тождеств

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \alpha(x+1) = p'(x_1-1) \alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x-1) \alpha(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) y(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} \psi'(t-1, x-1) y(t, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t-1, x-1) y(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1, x_1-1) y(t, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_1-1, x-1) y(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_0-1, x-1) y(t_0, x) + \\ &+ \psi'(t_1-1, x_1-1) y(t_1, x_1) - \psi'(t_0-1, x_1-1) y(t_0, x_1), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l'[t, x] y(t+1, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t-1, x] y(t, x) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t_1-1, x] y(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t_0-1, x] y(t_0, x), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_m[t, x] y(t, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_m[t, x-1] y(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_m[t, x_1-1] y(t, x_1). \quad (18) \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x)\alpha(x+1) = p_i'(x_1-1)\alpha(x_1) + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} p_i'(x-1)\alpha(x), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t, x)y(t+1, x+1) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t-1, x-1)y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \psi_i'(t-1, x_1-1)y(t, x_1) + \\ & + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_1-1, x-1)y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_0-1, x-1)y(t_0, x) + \\ & + \psi_i'(t_1-1, x_1-1)y(t_1, x) - \psi_i'(t_0-1, x_1-1)y(t_0, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} y(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} y(t, x) + \\ & + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l} y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_0-1, x]}{\partial l} y(t_0, x), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} y(t, x+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m} y(t, x) + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m} y(t, x_1), \end{aligned}$$

С учетом тождеств (19)-(21) из формулы приращения (14) получим

$$\begin{aligned} S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) &= \varepsilon \left[ \frac{-\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z} y(t_1, x_1) + \right. \\ & + p_i'(x_1-1)\alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [ p_i'(x-1)\alpha(x) - \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \alpha(x) ] - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t-1, x-1)y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \psi_i'(t-1, x_1-1)y(t, x_1) + \\ & + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_1-1, x-1)y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_0-1, x]}{\partial l} y(t_0, x) - \\ & \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m} y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m} y(t, x_1). \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Из разложения (22), с учетом того факта, что  $\psi_i(t, x), p_i(x)$  являются соответственно решениями задач (6), (7), получим

$$S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon), \quad i = \overline{0, s}. \quad (23)$$

При помощи разложений (23) доказывается

**Теорема 1.** При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления  $u(x)$  в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \leq 0, \quad (24)$$

выполнялось для всех  $v(x) \in U, x \in X$ .

**Необходимые условия оптимальности особых управлений.**

Перейдем к исследованию особого случая, т.е. случая вырождения необходимого условия оптимальности (24).

Следуя [14] введем.

**Определение 1.** Допустимое управление  $v(x)$  назовем критическим относительно экстремали Понтрягина  $u(x)$ , если

$$\min_{i \in J(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] = 0. \quad (25)$$

**Определение 2.** Экстремаль Понтрягина  $u(x)$  назовем особой в смысле принципа максимума Понтрягина в задаче (1)-(5) если существует соответствующее ей критическое допустимое управление  $v(x) \neq u(x)$ .

В дальнейшем через  $J_1(u)$  будем обозначать максимальное подмножество индексов из  $J(u)$  такое, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] = 0, \quad i \in J_1(u).$$

для всех допустимых управлений, критических относительно  $u(x)$ .

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности особых управлений.

Допустим, что в задаче (1)-(5)

$$f(t, x, z, l, m) = A(t, x)m + f_1(t, x, z, l). \quad (26)$$

Здесь  $A(t, x)$ - заданная  $n \times n$ -матричная функция,  $f(t, x, z, l)$  заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, l)$  до второго порядка включительно.

Пусть  $\Phi(x, s) - (n \times n)$  матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\Phi(x, s-1) = \Phi(x, s)F_a[s], \quad \Phi(x, x-1) = E.$$

Положим

$$Q(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} [R(t, x : t_0 - 1, \tau - 1) - R(t, x : t_0 - 1, \tau)] f_l[t_0 - 1, \tau] \Phi(\tau, s) + \\ + R(t, x : t_0 - 1, x - 1) \Phi(x, s),$$

Здесь  $R(t, x; \tau, s)$  ( $n \times n$ ) матричная функция, являющаяся решением задачи

$$R(t, x; \tau - 1, s - 1) = R(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + R(t, x; \tau - 1, s) f_l[\tau - 1, s] + R(t, x; \tau, s - 1) f_m[\tau, s - 1],$$

$$R(t, x; \tau - 1, x - 1) = R(t, x; \tau, x - 1) f_m[\tau, x - 1],$$

$$R(t, x; t - 1, s - 1) = R(t, x; t - 1, s) f_l[t - 1, s],$$

$$R(t, x; t - 1, x - 1) = E.$$

и введем обозначение

$$L_i(\tau, s) = -\Phi'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, s) - Q'(t_1, x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} Q(t_1, x_1, s) + \\ + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} [\Phi'(x, \tau) \frac{\partial^2 M^{(i)}[x]}{\partial a^2} \Phi(x, s) + \sum_{t=t_0}^{t-1} [Q'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial z^2} Q(t, x, s) + \\ Q'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial z \partial l} Q(t+1, x, s) + Q'(t+1, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial l \partial z} Q(t, x, s) + \\ + Q'(t+1, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial l^2} Q(t+1, x, s) ]], \quad (27)$$

Справедлива.

**Теорема 2.** Если множество (8) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума, управления  $u(x)$  в задаче (1)-(5), (26) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J_1(u)} \left[ \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(\tau)} F'[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{v(s)} F[s] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{v(s)} F[s] \right] \right] \leq 0, \quad (28)$$

выполнялось для всех критических относительно  $u(x)$ ,  $x \in X$  допустимых управлений  $v(x)$ ,  $x \in X$ .

Доказательство теоремы 2 проведем в два этапа. Сначала докажем, что соотношение (24) имеет место для таких критических допустимых управлений  $v(x)$ , для которых



$$\min_{i \in J(u)/J_1(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \leq 0. \quad (29)$$

Допустим обратное. Пусть существует критическое допустимое управление  $\bar{v}(x), x \in X$ . такое что

$$\min_{i \in J(u)/J_1(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] > 0. \quad (30)$$

но при этом

$$\begin{aligned} & \min_{i \in J_1(u)} \left[ \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}} F[s] + \right. \\ & \left. + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}} F[s] \right] \right] > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

По определено

$$\begin{aligned} \bar{y}(t, x) &= \frac{\partial z(t, x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}; \quad \bar{Y}(t, x) = \frac{\partial^2 z(t, x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}, \\ \bar{\alpha}(x) &= \frac{\partial a(x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}; \quad \bar{V}(t, x) = \frac{\partial^2 a(x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из введенных обозначений сразу следует что  $\bar{y}(t, x), \bar{Y}(t, x), \bar{\alpha}(x), \bar{V}(x)$  являются соответственно решениями следующих задач

$$\begin{aligned} \bar{y}(t+1, x+1) &= f_z[t, x] \bar{y}(t, x) + f_l[t, x] \bar{y}(t+1, x) + f_m[t, x] \bar{y}(t, x+1), \\ \bar{y}(t_0, x) &= \bar{\alpha}(x), \quad x \in X \cup x_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bar{y}(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1,$$

$$\bar{Y}(t+1, x+1) = f_z[t, x] \bar{Y}(t, x) + f_l[t, x] \bar{Y}(t+1, x) + f_m[t, x] \bar{Y}(t, x+1) +$$

$$\begin{aligned} & + \bar{y}'(t, x) f_{zz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \bar{y}'(t, x) f_{zl}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x) f_{lz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \\ & + \bar{y}'(t+1, x) f_{ll}[t, x] \bar{y}(t+1, x), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t_0, x) &= \bar{V}(x) \quad x \in X \cup x_1; \quad \bar{Y}(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1 \\ \bar{\alpha}(x+1) &= F_a[x] \bar{\alpha}(x) + \Delta_{\bar{v}(x)} F[x], \quad x \in X, \quad \bar{\alpha}(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(x+1) &= F_a[x] \bar{V}(x) + 2\Delta_{\bar{v}(x)} F_a[x] \bar{\alpha}(x) + \bar{\alpha}'(x) F_{aa}[x] \bar{\alpha}(x), \\ \bar{V}(x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее, используя формулу Тейлора и учитывая (13), получаем, что

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi^{(i)'_1}(a_1(x_1))}{\partial a} \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) \bar{y}(t_1, x_1) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(\bar{a}_1(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a_1(x_1))}{\partial a} \bar{V}(x_1) + \right. \\
& \left. + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z} \bar{Y}(t_1, x_1) \right] + o(\varepsilon^2). \quad (37)
\end{aligned}$$

Допустим, что  $i \in J(u) \setminus J_1(u)$ .

В этом случае, принимая во внимание (30), из (37) получаем, что

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) = S_i(u(x)) - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] < 0. \quad (38)$$

Пусть теперь  $i \in J_1(u)$ . Тогда, используя (14)-(15) из (16) получаем,

$$\begin{aligned}
S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = & \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a_1(x_1))}{\partial a} \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z} \bar{y}(t_1, x_1) \right] + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a_1(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a_1(x_1))}{\partial a} \bar{V}(x_1) + \right. \\
& \left. + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) \right. \\
& \left. + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z} \bar{Y}(t_1, x_1) \right] + \varepsilon \left[ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x) \bar{\alpha}(x+1) - M_a^{(i)}[x] + \bar{\alpha}(x) \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] \right] + \\
& + \varepsilon \left[ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \psi'(t, x) \bar{y}(t+1, x+1) - H_z^{(i)}[t, x] \bar{y}(t, x) + H_l^{(i)}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \right. \right. \\
& \left. \left. + H_m^{(i)}[t, x] \bar{y}(t, x+1) \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ p_i'(x) \bar{V}(x+1) - M_a^{(i)}[x] \bar{V}(x) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) + \bar{\alpha}'(x) M_{aa}^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t, x) \bar{Y}(t+1, x+1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left[ H_z^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t, x) + H_l^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t+1, x) + H_m^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t, x+1) + \bar{y}'(t, x) H_{zz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{y}'(t, x) H_{zj}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{iz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{ii}[t, x] \bar{y}(t+1, x) \right] + o(\varepsilon^2) \right]
\end{aligned}$$

где  $\psi_i(t, x)$ ,  $p_i(x)$  являются решениями сопряженной системы

$$\begin{aligned}
\psi_i(t-1, x-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} + \frac{\partial H^{(i)}[t-1, x]}{\partial l} + \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m}, \\
\psi_i(t_1-1, x-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i(t-1, x_1-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m}, \\ \psi_i(t_1-1, x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z}, \\ p_i(x-1) &= \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x-1) - \frac{\partial H^{(i)}[t_0, x]}{\partial l}, \\ p_i(x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x_1-1).\end{aligned}$$

Отсюда после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned}& S_i(\bar{u}(x: \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) + \right. \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [ \bar{\alpha}'(x) M_{aa}^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) + 2\Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'}[x] \bar{\alpha}(x) ] + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [ \bar{y}'(t, x) H_{zz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \\ &+ \bar{y}'(t, x) H_{z\bar{z}}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{\bar{z}z}[t, x] \bar{y}(t, x) + \\ &+ \bar{y}'(t+1, x) H_{\bar{z}\bar{z}}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (39)$$

С другой стороны, решения задач (33) и (35) допускают представления

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s], \quad (40)$$

$$\bar{\alpha}(x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s], \quad (41)$$

где  $Q(t, x, s)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned}Q(t, x, s) &= \sum_{\tau=s+1}^{x-1} [ R(t, x: t_0-1, \tau-1) - R(t, x: t_0-1, \tau) f_l[t_0-1, \tau] ] \Phi(\tau, s) + \\ &+ R(t, x: t_0-1, x-1) \Phi(x, s),\end{aligned}$$

а  $\Phi(x, s) - (n \times n)$  матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\Phi(x, s-1) = \Phi(x, s) F_a[s], \quad \Phi(x, x-1) = E.$$

При помощи представлений (40), (41) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) = \\
& = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] \Phi'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \Big], \\
& \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'} [x] \bar{\alpha}(x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'} [x] \Phi(x, s) \Delta_{v(s)} F[s] \right] \Big], \\
& \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] Q'(t_1, x_1, \tau) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} Q(t_1, x_1, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \Big] \\
& \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \bar{\alpha}(x) M_{aa} [x] \bar{\alpha}(x) = \\
& = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] \left[ \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x, \tau) M_{aa}^{(i)} [x] \Phi(x, s) \right] \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \Big], \\
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [y'(t, x) H_{zz} [t, x] y(t, x) + y'(t, x) H_{zj} [t, x] y(t+1, x) + \\
& + y'(t+1, x) H_{lz} [t, x] y(t, x) \\
& + y'(t+1, x) H_{ll} [t, x] y(t+1, x)] = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] \times \\
& \times \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} [ Q'(t, x, \tau) H_{zz}^{(i)} [t, x] Q(t, x, s) + \right. \\
& + Q'(t, x, \tau) H_{zj}^{(i)} [t, x] Q(t+1, x, s) + Q'(t+1, x, \tau) H_{lz}^{(i)} [t, x] Q(t, x, s) + \\
& \left. + Q'(t+1, x, \tau) H_{ll}^{(i)} [t, x] Q(t+1, x, s) \right] \Delta_{v(s)} F[s].
\end{aligned}$$

При помощи этих тождеств с учетом (27), При помощи формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned}
& S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = [\varphi_1^{(i)}(a(x_1; \varepsilon)) - \varphi_1^{(i)}(a(x_1))] + \\
& [\varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1; \varepsilon)) - \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))] = \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a}(a(x_1)) \alpha(x_1) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) y(t_1, x_1) \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

разложение (34) при  $i \in J_1(u)$  представляется в виде

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \Delta_{\bar{v}(\tau)} F[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \right] \right] + o(\varepsilon^2) \quad (42)$$

Поэтому, принимая во внимания (29), (30), получаем, что при  $i \in \{\overline{1, s}\} \setminus J(u)$

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) = S_i(u(x)) - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) = \varphi_1^{(i)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1)) - \\ - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) < 0.$$

Если же  $i \in J(u) \setminus J_1(u)$  то

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) < 0.$$

А при  $i \in J_1(u)$  получаем, что

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \right] \right] + o(\varepsilon^2) < 0.$$

Полученные соотношения показывают, что при достаточно малых  $\varepsilon$  – справедливы неравенства

$$S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) < 0, \quad i \in \overline{1, s}; \quad S_0(\bar{u}(x; \varepsilon)), S_0(u(x)).$$

которые противоречат оптимальности управления  $u(x)$ .

Перейдем к исследованию общего случая, считая что  $v(x), x \in X$  – произвольное критическое допустимое управление.

Если предполагать, что  $v_1(x), x \in X$  – критическое допустимое управление, удовлетворяющее (10), то в силу выпуклости множества

$$F(x, a(x), U) = \{\beta : \beta = F(x, a(x), v), v \in U\},$$

для малого  $\mu \in [0, 1]$  можно найти допустимое управление  $u_\mu(x), x \in X$  – которое является критическим относительно  $u(x), x \in X$ , и удовлетворяет условию (2), а также соотношению

$$\Delta_{u_\mu(x)} F[x] = \mu \Delta_{v_1(x)} F[x] + (1 - \mu) \Delta_{v(x)} F[x].$$

Следовательно, при любом  $\mu \in [0, 1]$  имеет место неравенство:

$$\min_{i \in J_1(u)} \left[ \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \mu \Delta_{v_1(\tau)} F'[\tau] + (1 - \mu) \Delta_{v(\tau)} F'[\tau] \right] L_i(\tau, s) \left[ \mu \Delta_{v_1(s)} F[s] + (1 - \mu) \Delta_{v(s)} F[s] \right] +$$

$$+ 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \mu \Delta_{v_1(x)} M_a^{(i)}[x] + (1-\mu) \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \right] \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi(x, s) \times \\ \times \left[ \mu \Delta_{v_1(s)} F[s] + (1-\mu) \Delta_{v(s)} F[s] \right] \leq 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , приходим к неравенству (8)

Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 2. является следующее утверждение.

**Теорема 3.** При выполнении условий теоремы 1. для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления  $u(x)$  в задаче (1)-(5), (26) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J_1(u)} \left\{ \Delta_v F[\xi] L_i(\xi, \xi) \Delta_v F[\xi] \right\} \leq 0 \quad (43)$$

выполнялось для всех  $v \in U$  и  $\xi \in X$ .

Для доказательства теоремы 2 достаточно в (9)  $v(x)$  определить по формуле

$$v(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X, \\ u(x), & x \neq \xi \in X. \end{cases}$$

Здесь  $\xi \in X$  – произвольная точка, а  $v \in U$  – произвольный вектор.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уилски А.С. Взаимосвязь между теорией цифровой обработки сигналов и теорией управления и оценивания // ТИИЭР, 1978, т.66, №9, с. 5-33.
2. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1989, 376 с.
3. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans Automat. Control 1976, vol. AC-21, №4, pp. 484-492
4. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
5. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // ДАН СССР, 1967, т. 175, №2 с.
6. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информ. сб. трудов ВЦ Ир. ГУ. Иркутск, 1968, вып.2, с. 87-104.
7. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в дискретных двухпараметрических системах // Изв АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1998, №2, с. 56
8. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения, 1991, № 2, с. 359-362.
9. Васильев О.В. Об одной задаче оптимального управления процессом с распределенными параметрами и управляемыми граничными условиями // В сб. Дифференц. и интег. уравнения. Иркутск, ИГУ, 1976, вып.4, с.82-110.
10. Алиева С.Т. Дискретный аналог метода разделения множителя Лагранжа на слагаемые // Научные Известия СГУ. 2004, № 2, с. 28-33.
11. Алиева С.Т. Об оптимальности особых граничных управлений в двухпараметрических системах // Докл. НАН Азербайджана, 2004, т. с.
12. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления с граничным условием. // Вестник БГУ. сер. физ.-мат. наук, 2004, № 4, с.13-19.

13. Алиева С.Т. Квазиособые управления в одной граничной задаче управления // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2004, № 3, с.71-76
14. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности особых управлений в дискретных системах с терминальными ограничениями. Изв. АН. БССР. сер.физ.-мат наук, 1985, №3, с. 48-51.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
16. Ащепков Л.Т., Габасов Р. К оптимизации дискретных систем // Дифференц. уравнения, 1972, №6, с. 1068-1080
17. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1972, 446 с.
18. Гайшун И.В., Горячкин В.В. Условие разрешимости и управляемость линейных двухпараметрических дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1988, т.24, № 12, с. 2047-2051
19. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем, I, II, III. //Автоматика и телемеханика, 1959, № 10, 11,12, с.1320-1334, 1441-1458, 1561-1578

## **BƏRABƏRSİZLİK TİP FUNKSIONAL MƏHDUDIYYƏT OLAN BİR SƏRHƏD OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ MƏXSUSİ HALIN TƏDQIQI**

**S.T.ƏLİYEVƏ**

### **XÜLASƏ**

İşdə sistemin halına bərabərsizlik tip funksional məhdudiyət qoyulmuş diskret iki parametrlı sistemlərlə optimal idarə olunan bir sərhəd məsələsinə baxılır. Diskret maksimum prinsipinin analoqu isbat olunmuşdur. Onun cırışdığı məxsusi hal tədqiq olunmuşdur.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimallıq şərti, məxsusi idarə, diskret maksimum prinsipi

## **RESEARCH OF A SPECIAL CASE IN ONE BOUNDARY PROBLEM OF OPTIMAL MANAGEMENT IN THE PRESENCE OF FUNCTIONAL LIMITATIONS OF TYPE OF INEQUALITIES**

**S.T.ALIYEVA**

### **SUMMARY**

In this work, we study one boundary-value problem of optimal control of discrete two-parameter systems in the presence of functional constraints such as inequalities on the state of the system. An analogue of the discrete maximum condition is proved. A special case of its degeneration is investigated.

**Keywords:** optimal control problem, admissible control, optimality condition, special control, discrete maximum principle.

*Postupila v redakciju: 04.02.2020 g.*

*Podpisano k печати: 22.10.2020 g.*

UOT 517.928

## ANTİPERİODİK SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN TAPILMASI HAQQINDA

S.Z.ƏHMƏDOV

*Bakı Dövlət Universiteti*  
*salehmedov0@gmail.com*

*Dörd tərtibli tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Bu məsələyə uyğun spektral məsələ tərtiq olunmuşdur. Verilənlər üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində məxsusi ədədlərin asimptotikası tapılmış və məsələnin Qrin funksiyasının vacib xassələri öyrənilmişdir. Məqalədə ayrılış teoremi isbat olunmuş və qarışıq məsələnin həlli qurulmuşdur.*

**Açar sözlər.** Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

*Dörd tərtibli tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Bu məsələyə uyğun spektral məsələ tərtiq olunmuşdur. Verilənlər üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində məxsusi ədədlərin asimptotikası tapılmış və məsələnin Qrin funksiyasının vacib xassələri öyrənilmişdir. Məqalədə ayrılış teoremi isbat olunmuş və qarışıq məsələnin həlli qurulmuşdur.*

**Açar sözlər:** Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

İşdə aşağıdakı məsələyə baxılır:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i p \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + q(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$L_k(u) \equiv \frac{\partial^{k-1} u(0,t)}{\partial x^{k-1}} + \frac{\partial^{k-1} u(1,t)}{\partial x^{k-1}} = 0, \quad k = \overline{1,4}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3)$$

Burada  $p > 0$  həqiqi ədəd,  $q(x)$  və  $\varphi(x)$  kompleks qiymətli funksiyalardır.

(1)-(3) qarışıq məsələsinə uyğun spektral məsələ aşağıdakı şəkildədir

$$i p y^{IV} + q(x) y'' - \lambda^4 y = -\varphi(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4)$$

$$L_k(y) = 0, \quad k = \overline{1,4} \quad (5)$$

(4) tənliyinə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin kökləri aşağıdakı kimi tapılır [2,3]



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8}i}, \quad \omega_2 = i \omega_1, \quad \omega_3 = -\omega_1, \quad \omega_4 = -i \omega_1$$

(4) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikasını tapmaq məqsədi ilə kompleks müstəvini aşağıdakı qayda ilə səkkiz sektora bölək:

$$S_k = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\}, \quad k = 1, 2,$$

$$S_k = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right\}, \quad k = 3, 4,$$

$$S_k = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{8} \right) < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right\}, \quad k = 5, 6,$$

$$S_k = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \left( -\frac{3\pi}{8} \right) < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{8} \right) \right\}, \quad k = 7, 8$$

Əgər  $q(x) \in C^1[0,1]$  olarsa  $S_k$  ( $k = \overline{1,8}$ ) sektorların hər birində  $|\lambda|$ -nin böyük qiymətlərində (4) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı göstərişə malikdir [6]

$$\frac{d^m y_n(x, \lambda)}{dx^m} = (\lambda \omega_n)^m \left[ 1 + \frac{1}{4\lambda \omega_n} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda \omega_n x};$$

$$|\lambda| \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in S_n \quad (n = \overline{1,8}), \quad n = \overline{1,4}; \quad m = \overline{0,3}; \quad (6)$$

(4), (5) spektral məsələsinin Qrin funksiyası

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}; \quad \lambda \in S_k, \quad k = \overline{1,8} \quad (7)$$

kimi tapılır. [3]

$\Delta(\lambda)$  xarakteristik determinanti adlanır və aşağıdakı şəkildədir [2]

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix} \quad (8)$$

$\Delta(x, \xi, \lambda)$  köməkçi determinanti isə aşağıdakı göstərişə malikdir

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) \\ L_1(g)_x & L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(g)_x & L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(g)_x & L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(g)_x & L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

Burada  $g(x, \xi, \lambda)$  Koşi funksiyası [1]

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 z_k(\xi, \lambda) y_k(x, \lambda)$$

“+” əgər  $0 \leq \xi \leq x \leq 1$ , “-” əgər  $0 \leq x \leq \xi \leq 1$  kimi tapılır.

$$Z_k(\xi, \lambda) = \frac{V_{4k}(\xi, \lambda)}{V(\xi, \lambda)}, \quad k = \overline{1,4}$$

$V_{4k}(\xi, \lambda)$  funksiyası  $V(\xi, \lambda)$  Vronski determinantının dördüncü sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcısıdır.

(4), (5) spektral məsələnin məxsusi ədədlərinin asimptotikasını tapmaq üçün aşağıdakı teoremi isbat edilmişdir.

**Teorem 1:** Əgər  $p > 0$ ,  $q(x) \in C^1[0,1]$ , olarsa, onda  $\Delta(\lambda)$  xarakteristik determinantının sıfırları yeganə limit nöqtəsi  $\lambda = \infty$  olan hesabı çoxluqdur və bu sıfırların asimptotikası üçün aşağıdakı göstərişə malikdir [7].

$$\mu_n = \frac{2\pi n + \pi}{2\omega_2} i, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lambda_n^4 = \mu_n^4 - 4 \frac{1}{\omega_2} \mu_n^2 b_2(1) + O(n) \quad n \rightarrow \infty \quad (9)$$

Yuxarıda tapılan (9) məxsusi ədədlərin asimptotikasından istifadə etməklə ayrılış teoremini verək:

**Teorem 2:** Fərz edək ki,  $q(x)$  və  $\varphi(x)$  funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyir.  $q(x) \in C^1[0,1]$ ,  $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ . Onda  $\varphi(x)$  funksiyası üçün aşağıdakı ayrılış düsturu doğrudur.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_{kn}} \lambda^3 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{\varphi(\xi)}{i p} d\xi \quad (10)$$

$c_k$ -sadə kontur olub  $\lambda$ -kompleks müstəvisində Qrin funksiyasının ancaq bir polyusunu öz daxilində saxlayır.

**İsbatı:**

Əvvəlcə  $\theta_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ) ədədlərini elə seçək ki, hər bir  $S_p$  ( $p = \overline{1,8}$ ) sektorlarda

$$\operatorname{Re} \theta_1 \lambda \leq \operatorname{Re} \theta_2 \lambda \leq 0 \leq \operatorname{Re} \theta_3 \lambda \leq \operatorname{Re} \theta_4 \lambda, \quad \lambda \in S_p \quad (p = \overline{1,8})$$

bərabərsizlik ödənilsin. Bunun üçün aşağıdakı kimi seçimi aparmaq kifayətdir.

$$\theta_1 = \omega_3; \quad \theta_2 = \omega_4; \quad \theta_3 = \omega_2; \quad \theta_4 = \omega_1; \quad \lambda \in S_1;$$

$$\theta_1 = \omega_3; \quad \theta_2 = \omega_2; \quad \theta_3 = \omega_4; \quad \theta_4 = \omega_1; \quad \lambda \in S_2;$$

$$\theta_1 = \omega_2; \quad \theta_2 = \omega_3; \quad \theta_3 = \omega_1; \quad \theta_4 = \omega_4; \quad \lambda \in S_3;$$

$$\theta_1 = \omega_2; \quad \theta_2 = \omega_1; \quad \theta_3 = \omega_3; \quad \theta_4 = \omega_4; \quad \lambda \in S_4;$$

$$\theta_1 = \omega_1; \quad \theta_2 = \omega_2; \quad \theta_3 = \omega_4; \quad \theta_4 = \omega_3; \quad \lambda \in S_5;$$

$$\theta_1 = \omega_1; \quad \theta_2 = \omega_4; \quad \theta_3 = \omega_2; \quad \theta_4 = \omega_3; \quad \lambda \in S_6;$$

$$\theta_1 = \omega_4; \theta_2 = \omega_1; \theta_3 = \omega_3; \theta_4 = \omega_2; \quad \lambda \in S_7;$$

$$\theta_1 = \omega_4; \theta_2 = \omega_3; \theta_3 = \omega_1; \theta_4 = \omega_2; \quad \lambda \in S_8;$$

$\Delta(x, \xi, \lambda)$  determinantının ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, sütunlarını uyğun olaraq  $\frac{1}{2}z_1(\xi, \lambda)$ ,  $\frac{1}{2}z_2(\xi, \lambda)$ ,  $-\frac{1}{2}z_3(\xi, \lambda)$ ,  $-\frac{1}{2}z_4(\xi, \lambda)$  funksiylarına vurub birinci sütunun üzərinə gələk. bu çevirmələrdən sonra birinci sütun elementlərini  $g_0(x, \xi, \lambda)$  və  $g_p(\xi, \lambda)$  ( $p = \overline{1,4}$ ) işarə etsək alarıq:

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} z_1(\xi, \lambda)y_1(x, \lambda) + z_2(\xi, \lambda)y_2(x, \lambda), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ -z_3(\xi, \lambda)y_3(x, \lambda) - z_4(\xi, \lambda)y_4(x, \lambda), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$g_{p+1}(\xi, \lambda) = -\sum_{k=1}^2 z_k(\xi, \lambda) \frac{d^p y_k(x, \lambda)}{dx^p} \Big|_{x=1} - \sum_{k=3}^4 z_k(\xi, \lambda) \frac{d^p y_k(x, \lambda)}{dx^p} \Big|_{x=0} \quad p = \overline{0,3}$$

burada

$$z_k(\xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} \frac{V_{4k}}{V} \left[ 1 - \frac{1}{4\lambda\theta_k} \int_0^\xi q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{-\lambda\theta_k \xi}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$\lambda \in S_p \quad (p = \overline{1,8})$$

$V$  -  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  ədədlərindən düzəlmiş Vandermant determinantıdır.

$V_{4k}$  -  $V$ -determinantının  $(4, k)$  elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

$\Delta(x, \xi, \lambda)$  determinantını əvvəlcə birinci sətərə görə, sonra alınmış determinantların hər birini birinci sütuna görə açsaq, alarıq:

$$\frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = g_0(x, \xi, \lambda) + \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^4 y_m(x, \lambda) g_k(\xi, \lambda) \frac{\Delta_{km}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (11)$$

$\lambda$ -kompleks müstəvisində mərkəzləri koordinat başlanğıcında radiusları monoton artan və  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = +\infty$  şərtlərini ödəyən çevrələrdə radiusları  $O_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ilə işarə edək.  $O_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) çevrələr ardıcılığının radiuslarını elə seçək ki, bu çevrələr  $\Delta(\lambda)$  determinantının sıfırlarının  $\delta$  ətrafını kəsməsin. (11) düsturunun hər tərəfini  $\varphi(\xi)$  funksiylasına vurub, 0-dan 1-ə kimi inteqrallayaq:

$$\int_0^1 \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \varphi(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^2 y_k(x, \lambda) \int_0^1 z_k(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi - \sum_{k=3}^4 y_k(x, \lambda) \int_0^1 z_k(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi +$$

(12)

$$+ \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^4 y_m(x, \lambda) \int_0^1 g_k(\xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi$$

(12) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralları hissə-hissə inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \varphi(\xi) d\xi = \frac{i p}{\lambda^4} \varphi(x) + \frac{M(x, \xi, \lambda)}{\lambda^5} \quad (13)$$

Burada  $M(x, \xi, \lambda)$  funksiyası  $[0,1]$  parçasında  $x$  və  $\xi$  -yə görə məhdud,  $\lambda \in S_p$  ( $p = \overline{1,8}$ ) sektorlarında  $\lambda$  - kompleks parametrinə görə analitiktir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi p} \int_{O_k} \lambda^3 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi d\lambda = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_{kn}} \lambda^3 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{\varphi(\xi)}{i p} d\xi \quad (14)$$

$M(x, \xi, \lambda)$  funksiyası  $[0,1]$  parçasında  $x$  və  $\xi$  -yə görə məhdud olduğunu nəzərə almaqla (13) düsturundan istifadə etsək, alırıq.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi p} \int_{O_k} \lambda^3 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi d\lambda = \varphi(x) \quad (15)$$

(14) və (15) bərabərliklərini tutuşdursaq, ayrılış düsturunu alırıq.

Teorem isbat olundu.

Məlumdur ki,  $\operatorname{Re} q(x) > 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  olduqda (1) tənliyi Şilov mənada parabolikdir. Aşağıdakı teoremdə (1)-(3) məsələsinin həlli daha geniş sinifdə tapılmışdır. Xüsusi qeyd etmək lazımdır ki, həllin varlığı üçün əmsallar üzərinə qoyulan kafi şərt tədqiq olunan tənliyin Şilov mənada parabolik olmadığı halları da əhatə edir.

**Teorem 3.** Fərz edək ki,  $q(x)$  və  $\varphi(x)$  funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyir.  $q(x) \in C^1[0,1]$ ,  $\varphi(x) \in C^3[0,1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ .  $\operatorname{Re} \int_0^1 q(\tau) d\tau > 0$ .

Onda (1)-(3) qarışıq məsələsinin aşağıdakı düsturla tapılan həlli var.

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_{kn}} \lambda^3 e^{\lambda^4 t} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{\varphi(\xi)}{i p} d\xi \quad (16)$$

burada  $\lambda_{kn}$  ( $k = \overline{1,4}; n = 1, 2, 3, \dots$ ) ədədləri uyğun spektral məsələsinin Qrin funksiyasının bütün sıfırları işarə olunub. Harada ki, məxsusi ədədləri asimptotikası (9) düsturu ilə tapılıb

**İsbatı.**

Qarışıq məsələnin həllini

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_{kn}} \lambda^3 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) z(\xi, t, \lambda) d\xi \quad (17)$$

şəklində axtarılır. Burada  $z(\xi, t, \lambda)$  naməlum funksiyadır. Bu funksiyanı tapmaq üçün (17)-ni (1), (2)-də nəzərə alsaq parametrdən asılı adi diferensial tənlik üçün Koşi məsələsini alırıq:

$$\frac{dz(\xi, t, \lambda)}{dt} = \lambda^4 z(\xi, t, \lambda) \quad (18)$$

$$z(\xi, 0, \lambda) = \frac{1}{i p} \varphi(\xi) \quad (19)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki (18) və (19) Koşi məsələsinin həlli

$$z(\xi, t, \lambda) = \frac{1}{i p} e^{\lambda^4 t} \varphi(\xi) \quad (20)$$

düsturu ilə tapılır.

(20) həllini (17) sırasında nəzərə alsaq (16) düsturunu alarıq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (16) sırası (1)-(3) qarışıq məsələnin formal həllidir.

(9) düsturundan istifadə etsək aşağıdakı qiymətləndirməni aparmaq olar.

$$\left| e^{\lambda_{kn}^4 t} \right| = e^{t \operatorname{Re} \lambda_{kn}^4} = e^{-t \pi^2 n^2 \int_0^1 q(\tau) d\tau + O(n)}$$

Bu onu göstərir ki, əgər  $\operatorname{Re} \int_0^1 q(\tau) d\tau > 0$ ,  $t > 0$ , olduqda  $x \in [0, 1]$  olduqda (16)

sırası ilə təyin olunan  $u(x, t)$  funksiyası və onun  $x$ -ə görə dördüncü,  $t$ -yə görə birinci tərtib törəmələri mütləq və müntəzəm yığılır. Bu onu göstərir ki, (17) düsturu ilə tapılmış sıra (1)-(3) qarışıq məsələnin əsaslandırılmış həllidir.

Teorem isbat olundu.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Садовничий В.А., Любишкин В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа, Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с. 794-798
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла// М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку: Элм, 1989, 328 с.
4. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук. 2005, №2, с.5-12
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
6. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T.  $\lambda$  — kompleks parametrindən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması, Bakı Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, №1, s.70-77.
7. Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında, Bakı Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, №2, s.97-100.

# О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШЕННОЙ ЗАДАЧИ С АНТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

С.З. АХМЕДОВ

## РЕЗЮМЕ

Рассмотрена смешанная задача для уравнения четвертого порядка. Исследована соответствующая спектральная задача. При определенных условиях на данные найдена асимптотика собственных значений и изучены важные свойства функции Грина поставленной задачи. В работе дана теорема разложения и найдено решение задачи.

**Ключевые слова:** Собственные значения, Функция Грина, фундаментальные решения, характеристический детерминант, спектральная задача.

## ABOUT THE SOLUTION OF ONE MIXED PROBLEM WITH AN ANTIPERIODIC BOUNDARY CONDITION

S.Z.AHMADOV

## SUMMARY

For the equation with four portion, mixed problem was reviewed. Spectral task appropriate to this task was investigated. At some condition on dates the asymptotic of eigenvalues is found and important properties of Green's function of the stated problem is investigated. In article, separation theorem was proven and one solution of mixed problem was settled.

**Keywords:** Eigenvalues, Green function, fundamental solution, characteristic determinant, spectral problem.

*Redaksiyaya daxil oldu: 05.02.2020-ci il*

*Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il*

УДК 517.53

О СКОРОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ  
ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А.ТАГИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*mtagiyeva@mail.ru*

В статье дается характеристика скорости наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами на компактных множествах комплексной плоскости на языке скорости роста ее коэффициентов разложения в ряд по обобщенным полиномам, и приводится сравнение со скоростью приближения частными суммами рядов по обобщенным полиномам.

**Ключевые слова:** обобщенные аналитические функции, скорость наилучшего равномерного приближения.

Пусть  $E_n(w, \overline{G})$  - наилучшее равномерное приближение функции  $w$ , обобщенной аналитической в области  $G$  и непрерывной в  $\overline{G}$ , обобщенными полиномами степени  $\leq n$ , т.е.

$$E_n(w, \overline{G}) = \inf_{P_n} \sup_{z \in \overline{G}} |w(z) - P_n(z)|.$$

В [2] получены оценки  $E_n(w, \overline{G})$  в зависимости от свойств функции  $w(z)$  и гладкости границы области  $G$  (см. т.1,2). В настоящей статье скорость наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами на компактных множествах  $K \subset \mathbf{C}$  характеризуется на языке скорости роста ее коэффициентов разложения в ряд по обобщенным полиномам и сравнивается со скоростью приближения частными суммами рядов по обобщенным полиномам Фабера.

В качестве множества  $K$  рассматривается односвязная область комплексной плоскости  $\mathbf{C}$  со спрямляемой границей  $\Gamma$ . Мы получаем аналоги результатов [3] в классе обобщенных аналитических функций.

Рассмотрим сначала случай, когда  $K = \overline{U}_R = \{z : |z| \leq R\}$ .

Далее  $U_{p,2}(\bar{U}_R)$ ,  $p > 2$ , обозначает класс функции, обобщенных аналитических в круге  $U_R$  и непрерывных в  $\bar{U}_R$  ([1]); обобщенные полиномы для  $U_R$  обозначаются  $w_k(z,0,R)$ . Функции  $w(z)$  сопоставляется ряд по обобщенным полиномам

$$w \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(z,0,R), \quad (1)$$

где

$$a_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, \quad k = 0,1,2,\dots \quad (2)$$

$T_n(w)$  - обозначает  $n$ -ю частичную сумму ряда (1) для функции  $w(z)$ .

Для описания скорости приближения элементов будут использованы следующие множества:

$$\Pi' = \{g \in C^2(0;\infty); g(x) > 0, g''(x) < 0, x > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty\}.$$

Для каждой  $g \in \Pi'$  справедливы следующие соотношения:

- 1)  $g'(x) > 0, x > 0$ ;
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (g')^{-1}(x) = \infty$ ;
  - 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ .
- [3]

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $w(z) \in U_{p,2}(\bar{U}_r)$ ,  $p > 2, r > 0$ . Тогда для  $g \in \Pi'$  и  $R > r$  следующие свойства эквивалентны

- i)  $E_n(w, U_{p,2}(\bar{U}_r)) = O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right), n \rightarrow \infty$ ;
- ii)  $|a_k| = O\left(e^{g(k)} / R^k\right), k \rightarrow \infty$ ;
- iii)  $\|w - T_n(w)\|_{U_{p,2}(\bar{U}_r)} = O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right), n \rightarrow \infty$ .

Кроме того, если справедливо одно из этих свойств, то функция  $w(z)$  является обобщенной аналитической в круге  $U_R$ .

**Доказательство.** Пусть справедливо (ii). Покажем, что  $w(z)$  разлагается в ряд (1), равномерно сходящийся внутри круга  $U_R$ .

Для общего члена ряда (1) справедливо представление

$$c_{2k} w_{2k}(z,0,R) + c_{2k+1} w_{2k+1}(z,0,R) = Z^{(k)}(a_k; 0, z). \quad (4)$$

[9]



Оценивая его, получим для  $\forall z, |z| = r < R$

$$\begin{aligned} |c_{2k}w_{2k}(z,0,R) + c_{2k+1}w_{2k+1}(z,0,R)| &= |Z^{(k)}(a_k;0,z)| \leq \\ &\leq M|a_k||z|^k \leq Me^{g(k)}/R^k \cdot r^k = M \left( e^{\frac{g(k)}{k}} \frac{r}{R} \right)^k, \end{aligned}$$

где  $M$  - постоянная, зависящая от порождающей пары  $(F, G)$  [1].

Учитывая свойство (3) функции  $g \in \Pi'$ , выберем  $\varepsilon > 0$ , так чтобы

$$\frac{r}{R} e^\varepsilon = q < 1. \quad (5)$$

Тогда общий член ряда (1) мажорируется общим членом сходящейся геометрической прогрессии и, значит, ряд (1) сходится равномерно внутри  $U_R$  и представляет функцию  $w(z)$ , обобщенную аналитическую в  $U_R$ .

Получим теперь оценку (i).

Имеем для  $r < R$

$$\begin{aligned} E_n(w, U_{p,2}(\bar{U}_r)) &\leq \|w - T_n(w)\|_{U_{p,2}(\bar{U}_r)} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} Z^{(k)}(a_k;0,z) \right\|_{U_{p,2}(\bar{U}_r)} \leq \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \leq M \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} e^{g(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{g(k+n+1)-g(n+1)} \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^k. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя теорему о среднем, найдем, что

$$e^{g(k+n+1)-g(n+1)} < e^\varepsilon.$$

Тогда (6) примет вид

$$E_n(w, U_{p,2}(\bar{U}_r)) \leq M e^{g(n+1)} \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\varepsilon k} \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^k, \quad n > n_0,$$

что дает (i) и (iii), т.к. последняя сумма сходится в силу (5).

Пусть теперь  $w(z)$  обладает свойством (i). Покажем, что она является обобщенной аналитической функцией в круге  $U_R$ ,  $R > r$ . Имеем

$$E_n(w, U_{p,2}(\bar{U}_r)) \leq M \left( \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} e^{g(n+1)} \right), \quad (7)$$

откуда для  $z \in \bar{U}_r$  получим

$$|w(z) - P_n(z)| \leq M \left( \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} e^{g(n+1)} \right).$$

Но тогда

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq |w(z) - P_{n+1}(z)| + |w(z) - P_n(z)| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq M\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} e^{g(n+2)} + M\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)} = \\
&= \left(\frac{r}{R} e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1} \left(M + M\left(\frac{r}{R}\right) e^{g(n+2)-g(n+1)}\right) \leq \\
&\leq \left(\frac{r}{R} e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1} \left(M + M\left(\frac{r}{R}\right) e^\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство влечет равномерную сходимость последовательности  $\{P_n(z)\}$  внутри круга  $U_R$  к обобщенной аналитической функции. Но на  $K$   $\{\mathcal{P}_n(z)\}$  сходится к  $w(z)$ , следовательно,  $w(z)$  допускает продолжение до функции  $w(z)$ , обобщенной аналитической в круге  $U_R$ .

Обозначая  $P_{k-1}^0$  - обобщенный полином наилучшего приближения функции  $w(z)$  в  $U_R$ .

Из формулы Коши для обобщенных аналитических функций [9] и (i) имеем

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\Gamma} z^{(-k-1)} \left( \frac{w(z) - P_{k-1}^{(0)}(z)}{i} dz, 0, 0 \right) \right| \leq \\
&\leq E_n(w, U_{p,2}(\bar{U}_r)) / r^k = O(e^{g(k)} / R^k),
\end{aligned}$$

что доказывает (ii).

Пусть справедливо (iii). Тогда свойство (i) следует из (iii) по определению.

Теорема 1 доказана.

Обобщим теорему 1 на случай более общих множеств.

Пусть  $K$  - односвязное компактное подмножество комплексной плоскости  $\mathbf{C}$  со спрямляемой границей  $\Gamma$ , и пусть  $\psi$  - единственное конформное отображение внешности единичного круга на дополнение  $K$  с условием  $\psi(\infty) = \infty$ ,  $\psi'(\infty) = c > 0$ . Пусть  $\Gamma_R$ ,  $R > 1$ , - линия уровня,  $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$ , где  $\Phi = \psi^{-1}$ , и пусть  $E_R$  - внутренность  $\Gamma_R$ .

Для рассматриваемых множеств последовательность  $\{\mathcal{P}_k(z, K)\}_{k \in P}$ ,  $P = 0, 1, 2, \dots$  обобщенных полиномов Фабера  $\mathcal{P}_k(z, K)$  определяется порождающими функциями

$$\Omega_1(z, t, K) \psi'(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_{2k}(z, K) - i \mathcal{P}_{2k+1}(z, K)}{\tau^{k+1}},$$

$$\Omega_2(z, t, K) \overline{\psi'(t)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_{2k}(z, K) + i \mathcal{P}_{2k+1}(z, K)}{\bar{t}^{k+1}}.$$

Для функции  $w \in U_{p,2}(K)$  ее ряд по обобщенным полиномам Фабера определяется

$$w \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \mathcal{P}_{2k}(z, K) + c_{2k+1} \mathcal{P}_{2k+1}(z, K). \quad (8)$$

Числа

$$a_k = c_{2k} + i c_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{w(\psi(t)) dt}{t^k}$$

или

$$a_k = \frac{{}^{(k)}w(0)}{k!}, \quad k \in P,$$

называются коэффициентами Фабера обобщенной аналитической функции  $w(z)$ ,  $n$ -я частичная сумма ряда (8) обозначается  $S_n(w; z)$ .

Обобщенным оператором Фабера называется оператор вида

$$w = (F\tilde{w})(z, K) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, K) \tilde{w}(\Phi(\xi)) d\xi - \\ - \Omega_2(z, \xi, K) \overline{\tilde{w}(\Phi(\xi))} d\bar{\xi},$$

который каждую функцию  $\tilde{w} \in U_{p,2}(\bar{U}_1)$  переводит в функцию  $w \in U_{p,2}(K)$ .

Обратный обобщенный оператор Фабера имеет вид

$$\tilde{w}(\eta) = F^{-1}(w)(\eta, U_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(\eta, t, U_1) w(\psi(t)) dt - \\ - \Omega_2(\eta, t, U_1) \overline{w(\psi(t))} d\bar{t}$$

и переводит каждую функцию  $w \in U_{p,2}(K)$  в функцию  $\tilde{w} \in U_{p,2}(\bar{U}_1)$ .

Множества  $K$ , для которых обобщенный оператор Фабера ограничен, называются Фаберовыми множествами. В дальнейшем, мы будем полагать, что граница  $\Gamma$  - кривая Альпера, что обеспечивает ограниченность обобщенного оператора  $F$ .

Из свойств обобщенного оператора  $F$  следует

- 1)  $F(w_{2n})(z, U_1) = \mathcal{P}_{2n}(z, K)$
- 2)  $F(w_{2n+1})(z, U_1) = \mathcal{P}_{2n+1}(z, K)$
- 3)  $F(T_n)(z, U_1) = \sum_{k=0}^{1/2} c_{2k} \mathcal{P}_{2k}(z, K) + c_{2k+1} \mathcal{P}_{2k+1}(z, K)$

(см.[4]-[8]).

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если обобщенный полином  $P_n(z)$  на  $K$  удовлетворяет неравенству

$$|P_n(z)| \leq L, \quad z \in K,$$

то

$$|P_n(z)| \leq MR^n \quad \text{для } z \text{ на и внутри } \Gamma_R,$$

где  $M$  - постоянная, зависящая от порождающей пары  $(F, G)$ .

Доказательство этой теоремы следует из принципа подобия и соответствующего результата для голоморфных функций [1].

**Теорема 3.** Пусть  $1 < r < R$ , и предположим, что

$$\|w - P_n\|_{U_{p,2}(K)} = O(e^{g(n+1)}/R^{(n+1)}), \quad n \rightarrow \infty \quad (10)$$

для некоторой функции  $g' \in \Pi'$ , где  $P_n(z)$  - произвольный обобщенный полином степени  $\leq n$ . Тогда

$$\|w - P_n\|_{U_{p,2}(\bar{E}_r)} = O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

**Доказательство.** Из соотношения (10) следует, что для  $z \in K$

$$\|w(z) - P_n(z)\| \leq M(e^{g(n+1)}/R^{n+1}), \quad n > n_0$$

$$\|w(z) - P_{n+1}(z)\| \leq M(e^{g(n+2)}/R^{n+2}), \quad n > n_0$$

откуда для  $z \in K$

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq M e^{g(n+1)}/R^{n+1} \left(1 + \frac{e^{g(n+2)-g(n+1)}}{R}\right) \leq M \left(\frac{e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}}{R}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{e^\varepsilon}{R}\right).$$

Тогда по теореме 3 для  $z \in \bar{E}_r$

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq M \frac{\left(e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1}}{R^{n+1}} \left(1 + \frac{e^\varepsilon}{R}\right) r^{n+1} < M_1 \left(e^{\frac{g(n+1)}{n+1}} \cdot \frac{r}{R}\right)^{n+1}$$

(см (i) в теореме 1).

Из последнего неравенства следует, что последовательность  $\{P_n(z)\}$  сходится равномерно внутри  $E_R$  и функция  $w(z)$  является обобщенной аналитической в  $E_R$ .

Покажем, что справедливо (11).

Имеем

$$\begin{aligned}
\|w - P_n\|_{U_{p,2}(\bar{E}_r)} &\leq \sup_{z \in \bar{E}_r} \left( |P_n(z)| + \sum_{k=n}^{\infty} |P_{k+1} - P_k| \right) \leq \sup_{z \in \bar{E}_r} |P_n(z)| + \\
&+ M \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{r}{R} e^{\frac{g(k+1)}{k+1}} \right)^k \leq M \left( \frac{r}{R} e^{\frac{g(n+1)}{n+1}} \right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} e^{\frac{g(k+1)}{k+1}} \right)^k = \\
&= O \left( e^{g(n+1)} \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1 на случай множеств  $K$ , определенных выше.

**Теорема 4.** Пусть  $K$  Фаберово множество такое, что  $F^{-1}$  ограничен. Для каждой обобщенной аналитической функции  $w(z) \in U_{p,2}(K)$ ,  $g \in \Pi'$  и  $R > 1$ , следующие условия эквивалентны

- i)  $E_n(w, U_{p,2}(K)) = O(e^{g(n+1)}/R^{n+1})$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;
- ii)  $|a_k(w)| = O(e^{g(k)}/R^k)$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;
- iii)  $\|w - S_n(w)\|_{U_{p,2}(K)} = O(e^{g(n+1)}/R^{n+1})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Из условия (i), в силу теоремы 3 следует, что  $w(z)$  является обобщенной аналитической функцией в  $E_R$  и, следовательно существует  $\tilde{w} \in U_{p,2}(\bar{U}_1)$  такая, что  $F\tilde{w} = w$ . Кроме того, из  $F(w_{2n}) = \mathcal{P}_{2n}(z, K)$ ,  $F(w_{2n+1}) = \mathcal{P}_{2n+1}(z, K)$  и ограниченности обобщенного оператора  $F^{-1}$  следует, что

$$E_n(\tilde{w}, U_{p,2}(\bar{U}_1)) \leq M E_n(w, U_{p,2}(K)) = O(e^{g(n+1)}/R^{n+1}).$$

Таким образом  $\tilde{w}$  является обобщенной аналитической функцией в  $U_R$  и

$$\left| \frac{\tilde{w}^{(k)}(0)}{k!} \right| = O(e^{g(k)}/R^k), \quad k \rightarrow \infty \quad (12)$$

в силу теоремы 1.

Но

$$a_k(w) = \frac{\tilde{w}^{(k)}(0)}{k!}, \quad (13)$$

так что из (12) следует (ii).

Пусть справедливо (ii). Покажем, что  $w(z)$  является обобщенной аналитической функцией в  $E_R$ .

Возьмем произвольное  $r$ ,  $1 < r < R$ , и оценим общий член ряда (8).

Имеем

$$\begin{aligned} |c_{2k} \tilde{\varphi}_{2k}(z, K) + c_{2k+1} \tilde{\varphi}_{2k+1}(z, K)| &\leq |a_k| \left( |\tilde{\varphi}_{2k}(z, K) + \tilde{\varphi}_{2k+1}(z, K)| \right) \leq \\ &\leq M e^{g(k)} / R^k \cdot r^k = M \left( e^{\frac{g(k)}{k}} \frac{r}{R} \right)^k. \end{aligned}$$

Выберем  $\varepsilon$  столь малым, чтобы

$$\left( e^{\varepsilon} \cdot \frac{r}{R} \right) = q < 1.$$

Тогда ряд (8) сходится равномерно на  $\bar{E}_r$ , а потому и на  $K$  к обобщенной аналитической функции  $w(z)$  и по (i)  $w(z)$  является обобщенной аналитической функцией в  $E_R$ . Но тогда справедливо (13).

Теперь из теоремы 1 имеем

$$\|\tilde{w} - T_n(\tilde{w})\|_{U_{r,2}(\bar{U}_1)} = O(e^{g(n+1)} / R^{n+1}), n \rightarrow \infty.$$

Из (13) и свойств обобщенного оператора Фабера получим

$$F(T_n(\tilde{w})) = S_n w, n \in P,$$

так что ограниченность  $F$  дает (iii). Из (iii)  $\rightarrow$  (i) следует тривиально, и теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Тагиева М.А. О суммировании рядов по обобщенным полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2012, №4, с.86-90.
3. Freund H. The degree of polynomial interpolation and approximation of analytic function. Result math. 1988, т.13, №1-2, с.81-98.
4. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера и его свойства // Сборник «Линейные операторы и их приложения», АГУ, 1989, с.76-80.
5. Тагиева М.А. Об обратном обобщенном операторе Фабера // БГУ, 1994, с.176-179.
6. Тагиева М.А. О равномерной сходимости ряда по обобщенным полиномам Фабера внутри области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2004, №1, с.41-45.
7. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2010, №4, с.65-65.
8. Тагиева М.А. О разложении обобщённых аналитических функций в ряд по обобщённым полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2011, №4, с.55-60.
9. Тагиева М.А. О связи между некоторыми понятиями и формулами Векуа и Берса // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2013, №3, с.25-32.

# ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSIYALARIN ÇOXHƏDLİLƏRLƏ YAXINLAŞMASI HAQQINDA

M.Ə.TAĞIYEVA

## XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş analitik funksiyaların kompakt çoxluqlarda ümumiləşmiş çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşma sürəti xarakterizə edilir. Burada ümumiləşmiş çoxhədlilərə görə sıraya ayrılış əmsalların artım tərtibindən istifadə olunur və ümumiləşmiş Faber çoxhədlilərinə görə sıraya ayrılışının xüsusi cəmlərlə yaxınlaşma tərtibi ilə müqayisə olunur.

**Açar sözləri:** ümumiləşmiş analitik funksiyalar, ən yaxşı yaxınlaşma sürəti.

## ON DEGREE OF POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

M.A.TAGIYEVA

## SUMMARY

In this paper the rate of best polynomial approximation of a generalized analytic function on a compact Faber set is characterized in terms of the rate of growth of its Faber coefficients and compared with the rate of approximation by the partial sums of the Faber series.

**Key words:** the generalized analytic functions, the degree of polynomial approximations.

*Поступила в редакцию: 10.02.2020 г.*

*Подписано к печати: 22.10.2020 г.*

УДК 517.9.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО  
УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В.КЕРИМОВА

*Бакинский государственный университет**aytac.mensimli@mail.ru*

*Рассматривается одна система линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием. Найдено представление решения основной начальной задачи для рассматриваемого уравнения.*

**Ключевые слова:** разностное уравнение, запаздывание, линейное уравнение, Вольтерра, аналог задачи Коши, представление решения.

При исследовании различных задач оптимального управления непрерывными или же дискретными системами существенную роль играет представление решений соответствующих систем линейных или же линеаризованных уравнений (см., напр., [1-3]). Исходя из этих соображений в статье рассматривается аналог основной начальной задачи (см., напр., [1, 3, 4]) для одного класса линейных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием.

Найдено представление решения рассматриваемой задачи.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием

$$y(t+1) = A(t)y(t) + B(t)y(t-h) + \sum_{\tau=t_0}^t [(C(t, \tau)y(\tau) + D(t, \tau)y(\tau-h))] + \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau),$$

$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0} = \{t_0 - h, t_0 - h + 1, \dots, t_0 - 1\},$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

Здесь  $A(t), B(t), C(t, \tau), D(t, \tau)$  - заданные дискретные  $(n \times n)$  матричные функции,  $f(t, \tau)$  заданная  $n$ - мерная дискретная вектор функция,  $y_0$  - заданный постоянный вектор, а  $\varphi(t)$  - заданная  $n$ - мерная дискретная вектор-функция.



Целью работы является нахождение представления решения аналога основной начальной задачи (1) - (2) с помощью аналога матрицы Коши.

Пусть  $y(t)$  является решением основной начальной задачи (1) – (2). Тогда ясно, что имеет место тождество

$$y(\tau+1) = A(\tau)y(\tau) + B(\tau)y(\tau-h) + \sum_{s=t_0}^{\tau} [(C(\tau,s)y(s) + D(\tau,s)y(s-h))] + \sum_{s=t_0}^{\tau} f(\tau,s) \quad (3)$$

Умножая обе части тождества (3) слева на пока произвольную  $n \times n$  дискретную матричную функцию  $F(t, \tau)$  и затем суммируя по  $\tau$  от  $t_0$  до  $t-1$  получим

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)y(\tau+1) &= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)[A(\tau)y(\tau) + B(\tau)y(\tau-h)] + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \left[ \sum_{s=t_0}^{\tau} F(t, \tau)(C(\tau,s)y(s) + D(\tau,s)y(s-h)) \right] + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=t_0}^{\tau} F(t, \tau)f(\tau,s). \quad (4) \end{aligned}$$

На основе дискретного аналога теоремы Фубини получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=t_0}^{\tau} [F(t, \tau)C(\tau,s)y(s)] = \sum_{s=t_0}^{t-1} \left[ \sum_{\tau=s}^{t-1} F(t, \tau)C(\tau,s) \right] y(s).$$

Далее сделав замену переменных  $s-h = \alpha$ , и учитывая (2), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=t_0}^{\tau} F(t, \tau)D(\tau,s)y(s-h) &= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)D(s, \tau)y(\tau-h), \\ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)B(\tau)y(\tau-h) &= \sum_{\tau=t_0-h}^{t-1-h} F(t, \tau+h)B(\tau+h)y(\tau) = \\ &= \sum_{\tau=t_0-t}^{t-1} F(t, \tau+h)B(\tau+h)\varphi(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1-h} F(t, \tau+h)B(\tau+h)y(\tau). \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть по определению

$$Q(t, \tau) = \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)D(s, \tau)$$

С делая задачу переменных  $\tau-h = \alpha$  получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, \tau)y(\tau-h) = \sum_{\tau=t_0-h}^{t-1-h} Q(t, \tau+h)y(\tau) = \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1} Q(t, \tau+h)\varphi(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t_0-1-h} Q(t, \tau+h)y(\tau). \quad (6)$$

Далее легко доказать, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)y(\tau+1) = F(t, t-1)y(t) - F(t, t_0-1)y(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau-1)y(\tau) \quad (7)$$

Учитывая тождества (5) – (7) в (3) получим, что

$$\begin{aligned}
& F(t, t-1)y(t) - F(t, t_0-1)y_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau-1)y(\tau) = \\
& = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau)A(\tau)y(\tau) + \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1} F(t, \tau+h)B(\tau+h)\varphi(\tau) + \\
& + \sum_{\tau=t_0}^{t-1-h} F(t, \tau+h)B(\tau+h)y(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \left[ \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(s, \tau) \right] y(\tau) + \\
& + \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1} Q(t, \tau+h)\varphi(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1-h} Q(t, \tau+h)y(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)f(s, \tau). \quad (8)
\end{aligned}$$

Группируя подобные члены имеем

$$\begin{aligned}
& F(t, t-1)y(t) - F(t, t_0-1)y_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1-h} [F(t, \tau-1) - F(t, \tau)A(\tau) - F(t, \tau+h)B(\tau+h) - \\
& - \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(s, \tau) - Q(t, \tau+h)]y(\tau) + \sum_{\tau=t-h}^{t-1} [F(t, \tau-1) - F(t, \tau)A(\tau) - \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(s, \tau)]y(\tau) = \\
& = \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1} [F(t, \tau+h)B(\tau+h) + Q(t, \tau+h)]\varphi(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)f(s, \tau) \quad (9)
\end{aligned}$$

Если предполагать, что матричная функция  $F(t, \tau)$  удовлетворяет соотношениям.

$$F(t, \tau-1) = F(t, \tau)A(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(s, \tau), \quad t-h \leq \tau \leq t-1,$$

$$F(t, \tau-1) = F(t, \tau)A(\tau) + F(t, \tau+h)B(\tau+h) + F(t, s)C(s, \tau) + \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(s, \tau) + Q(t, \tau+h),$$

$$t_0 \leq t \leq t-1-h, \quad F(t, t-1) = E,$$

то из (9) получим следующее представление для  $y(t)$ .

$$y(t) = F(t, t_0-1)y_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)f(s, \tau) + \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1} [(F(t, \tau+h)B(\tau+h) + Q(t, \tau+h))]\varphi(\tau). \quad (10)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема.** При сделанных предположениях решение основной локальной задачи (1) – (2) допускает представление в виде (10).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 561 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974, 272 с.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Бакинский университет, 2013, 151 с.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально разностные уравнения. М.: Наука, 1967.

# GEÇİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP XƏTTİ FƏRQ TƏNLIYİNİN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

A.V.KƏRİMOVA

## XÜLASƏ

Məqalədə gecikməyə malik bir Volterra tipli xətti bircins olmayan tənliklər sisteminə baxılır. Baxılan tənlik üçün əsas başlanğıc məsələnin həllinin göstərilişi tapılmışdır.

**Açar sözlər:** fərq tənliyi, gecikmə, xətti tənlik, Volterra, Koşi məsələsinin analoqu, həllin göstərilişi.

## ON THE REPRESENTATION SOLUTION THE VOLTERRA TYPE DELAY TIME LINEAR DIFFERENCE EQUATION

A.V.KARIMOVA

## SUMMARY

One system of linear inhomogeneous difference equations of the Volterra type with delay is considered. A representation of the solution of the main initial problem for the equation is found.

**Keywords:** difference equation, delay, linear equation, Volterra, analogue of the Cauchy problem, representation of a solution.

*Поступила в редакцию: 12.02.2020 г.*

*Подписано к печати: 22.10.2020 г.*

УДК 517.97

**ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО  
ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА****Г.Ф.КУЛИЕВ, З.Р.САФАРОВА***Бакинский Государственный Университет  
Нахичеванский Государственный Университет  
hkuliyev@rambler.ru, seferovazumrud@gmail.com*

*В работе исследуется задача быстрогодействия для одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка. Доказывается теорема существования оптимального управления, дифференцируемость функционала по Фреше и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.*

**Ключевые слова:** задача быстрогодействия, нелинейное гиперболическое уравнение, условие оптимальности

Как известно, задача быстрогодействия является первой задачей математической теории оптимального управления. Возникнув как обобщение ряда практических задач построения оптимальных систем управления, в силу удачного сочетания содержащегося в ней комплекса вопросов, она стала одной из основных. В теории оптимального управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задачи быстрогодействия достаточно хорошо изучены [1-4]. Но относительно процессов, описываемых уравнениями с частными производными, эти задачи сравнительно мало изучены [5-8]. Поэтому исследования задач быстрогодействия для различных нестационарных уравнений с частными производными, которые возникают в практических задачах, несомненно, являются актуальными. Для систем с распределенными параметрами исследование таких задач наталкивается на ряд принципиальных трудностей, при этом сами постановки задач могут быть более разнообразными и содержать особенности, которых нет в случае систем с сосредоточенными параметрами.

В настоящей работе изучается задача быстрогодействия для одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка, прототипом которого является уравнение, возникающее в релятивистской квантовой механике [9]. Доказывается теорема существования оптимального управ-

ления и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

### Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|u + vu = f(x, t) \text{ в } Q = \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

с граничным и начальными условиями

$$u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

где  $\Delta$  оператор Лапласа по  $x$ ,  $\Omega \subset R^n$ , ( $n = 3$  или  $n = 4$ ) – ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ ,  $Q$  - цилиндр в  $R^{n+1}$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  -

боковая поверхность цилиндра  $Q$ ,  $u_0 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ ,  $u_1 \in L_2(\Omega)$ ,  $f \in L_2(Q)$  - заданные функции,  $v = v(x, t)$  функция, определяющая управления. Класс допустимых управлений определим множеством

$V = \{v(x, t) | v \in L_4(Q), a \leq v(x, t) \leq b \text{ почти всюду (п.в.) на } Q\}$ ,  $a < b$ ,  $a, b$  - заданные числа.

Отметим, что аналогично работе [9, 20-29] можно показать, что для каждого управления  $v \in V$  задача (1), (2) имеет единственное решение  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ , причем

$$u \in L_\infty \left( 0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \cap L_3(\Omega) \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)).$$

Но мы рассматриваем случаи, когда  $n = 3$  или  $4$ , поэтому из теоремы вложения [10, 83] следует, что  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$  при  $n = 3$  и  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$  при  $n = 4$ . Тогда  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega) \cap L_3(\Omega) = \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  и, поэтому, решение  $u = u(x, t)$  задачи (1), (2) принадлежит пространству

$$U = \left\{ u = u(x, t) | u \in L_\infty \left( 0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \right), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \right\}.$$

Под решением задачи (1), (2) при каждом фиксированном управлении  $v \in V$  будем понимать функцию  $u = u(x, t) = u(x, t, v)$  из  $U$  равную  $u_0(x)$  при  $t = 0$  и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u|u\eta + vu\eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x, 0)dx = \int_Q f\eta dxdt$$

при всех  $\eta \in U$ , равных нулю при  $t = T$ .

Аналогично работе [9, 20-24] методом Фаэдо – Галёркина можно доказать, что для решения  $u = u(x, t)$  задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left[ \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right], \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

здесь и далее через  $c$  будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Рассмотрим следующую задачу: требуется найти такую пару  $(v, \tau) \in V \times (0, T)$ , чтобы она за наименьшее время приводила систему (1), (2) из начального состояния  $(u_0(x), u_1(x))$  в заданное множество  $K$ , где  $K$  - слабо замкнутое подмножество в  $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  (4)

Предположим, что существует такая пара  $(v, \tau) \in V \times (0, T)$  что для соответствующего решения задачи (1), (2) выполняется условие

$$\left\{ u(x, \tau; v), \frac{\partial u(x, \tau; v)}{\partial t} \right\} \in K. \quad (5)$$

Оптимальное время определяется из условия

$$\tau_0 = \inf \{ \tau \}, \quad (6)$$

т.е.  $\tau_0$  - нижняя грань всех значений  $\tau$ , удовлетворяющих условию (5).

### Теорема существования оптимальной пары

**Теорема 1.** Пусть выполнены выше положенные условия на данные задачи (1), (2) и условия (4), (5). Тогда существует такая пара  $(v_0, \tau_0) \in V \times (0, T)$ , что

$$\left\{ u(x, \tau_0; v_0), \frac{\partial u(x, \tau_0; v_0)}{\partial t} \right\} \in K \text{ и выполнено условие (6).}$$

**Доказательство.** Пусть последовательность  $(v_k; \tau_k) \in V \times (0, \tau)$  такова, что для решений задач (1), (2) выполняются:

$$\left\{ u(x, \tau_k; v_k), \frac{\partial u(x, \tau_k; v_k)}{\partial t} \right\} \in K, \quad \tau_k \rightarrow \tau_0, \quad v_k \rightarrow v_0 \text{ слабо в } L_4(Q).$$

Положим  $u_k = u(v_k) = u(x, t; v_k)$ . Тогда из (1), (2), записанных при  $v = v_k$ , учитывая оценку (3), получим

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left[ \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right], \quad t \in [0, T]$$

Отсюда следует, что

$u_k$  (соответственно  $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ ) остаются в ограниченном подмножестве пространства  $L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$  (соответственно  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ )

и что

$$\|u_k(\tau_k)\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \left\| \frac{\partial u_k(\tau_k)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left[ \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}^0 + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (8)$$

Следовательно, из последовательности  $\{v_k, \tau_k, u_k\}$  можно извлечь такую последовательность, которую, не умаляя общности, обозначим снова через  $\{v_k, \tau_k, u_k\}$ , для которой при  $k \rightarrow \infty$

$$v_k \rightarrow v_0 \text{ слабо в } L_4(Q), \quad v_0 \in V, \quad \tau_k \rightarrow \tau_0 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 \quad * \text{—слабо в } L_\infty\left(0, T; W_2^1(\Omega)\right) \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad * \text{—слабо в } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из (7) в частности, следует, что  $u_k$  принадлежит ограниченному множеству из  $W_2^1(Q)$ . Тогда в силу компактности вложения  $W_2^1(Q)$  в  $L_2(Q)$  [10, 84], можно считать, что  $u_k \rightarrow u_0$  сильно в  $L_2(Q)$  и п.в. в  $Q$ .

Но в силу теоремы вложения  $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ ,  $u_k$  ограничены в  $L_\infty(0, T; L_4(\Omega))$ , поэтому  $\|u_k|u_k\|_{L_2(Q)} \leq c$ . Тогда согласно лемме 1.3. из [9, 25] следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$|u_k|u_k \rightarrow |u_0|u_0 \text{ слабо в } L_2(Q). \quad (11)$$

Поскольку оператор Лапласа  $\Delta$  действует из  $W_2^1(\Omega)$  в  $W_2^{-1}(\Omega)$  [9, 21], где  $W_2^{-1}(\Omega)$  сопряженное пространство к пространству  $W_2^1(\Omega)$ , имеем

$$\Delta u_k \in L_\infty(0, T; W_2^{-1}(\Omega)). \quad (12)$$

Так как,  $\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = f + \Delta u_k - |u_k|u_k - v_k u_k$ , то из соотношений (9),

(10), (11), (12) следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = f + \Delta u_0 - |u_0|u_0 - v_0 u_0 \text{ слабо в } L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)) \quad (13)$$

Согласно оценке (8), можно считать, что слабо в  $W_2^0(\Omega) \times L_2(\Omega)$ ,  $\{\chi_0, \chi_1\} \in K$ . (14)

Покажем, что

$$u_k(\tau_k) \rightarrow u_0(\tau_0) \text{ слабо в } L_2(\Omega) \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_k(\tau_k)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_0(\tau_0)}{\partial t} \text{ слабо в } W_2^{-1}(\Omega).$$

Действительно,

$$u_k(\tau_k) - u_0(\tau_0) = u_k(\tau_k) - u_k(\tau_0) + u_k(\tau_0) - u_0(\tau_0) \quad (16)$$

Согласно первому из соотношений (10), имеем, в частности,  $u_k(\tau_0) \rightarrow u_0(\tau_0)$  слабо в  $L_2(\Omega)$  и

$$\begin{aligned} \|u_k(\tau_k) - u_k(\tau_0)\|_{L_2(\Omega)} &= \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{\partial u_k(t)}{\partial t} dt \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} \int_{\tau_0}^{\tau_k} dt \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_k} \left| \frac{\partial u_k(t)}{\partial t} \right|^2 dt dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c |\tau_k - \tau_0|^{1/2} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) следует, что справедливо первое соотношение из (15).

Аналогично, применяя соотношение (13), можно получить второе соотношение из (15).

Сравнивая соотношения (14) и (15), заключаем, что

$$\left\{ u_0(\tau_0), \frac{\partial u_0(\tau_0)}{\partial t} \right\} \rightarrow \{\chi_0, \chi_1\} \in K.$$

Запишем интегральные тождества для решений задачи (1), (2) при  $v = v_k$

$$\int_Q \left[ -\frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u_k|u_k \eta + v_k u_k \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt$$

при всех  $\eta \in U$ , равных нулю при  $t = T$ .

Если в этих интегральных тождествах перейти к пределу при



$k \rightarrow \infty$  и учесть соотношения (9), (10), (11) и, что  $u_k \rightarrow u_0$  сильно в  $L_2(Q)$ , получим

$$\int_Q \left[ -\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u_0| u_0 \eta + v_0 u_0 \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt$$

при всех  $\eta \in U$ , равных нулю при  $t = T$ . Отсюда следует, что  $u_0 = u(v_0) = u(x, t; v_0)$ , т.е. функция  $u_0 = u_0(x, t)$  является решением задачи (1), (2) при  $v = v_0(x, t)$ , причем приведения системы из начального состояния  $(u_0(x), u_1(x))$  во множество  $K$  равно  $\tau = \tau_0 \in (0, T)$ .

Теорема 1 доказана.

### Дифференцируемость функционала $J(v, \tau) = \tau(v)$ .

Поскольку, если функция  $u = u(x, t; v)$  является обобщенным решением из  $U$  задачи (1), (2) в цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$ , то она является обобщенным решением этой задачи и в области  $\Omega \times (0, \tau)$ , где  $\tau \in (0, T)$  произвольное фиксированное время. Тогда при  $t = 0$  выполняется условие  $u(x, 0; v) = u_0(x)$  и интегральное тождество

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u| u \eta + v u \eta - f \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} u_1(x) \eta(x, 0) dx = 0$$

$\forall \eta \in U$ , причем  $\eta(x, t) = 0$ ,  $t \in [\tau, T]$ .

Ясно, что

$$J(v, \tau) = \int_0^{\tau} dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u| u \eta + v u \eta - f \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} u_1(x) \eta(x, 0) dx$$

Пусть управлению  $v \in V$  соответствует время  $\tau \in (0, T)$  приведения системы из начального состояния  $(u_0(x), u_1(x))$  во множество  $K$ , а управлению  $v + \delta v \in V$  соответствует время  $\tau + \delta \tau \in (0, T)$  приведения системы из начального состояния  $(u_0(x), u_1(x))$  во множество  $K$ .

Обозначим  $\delta u(x, t) = u(x, t; v + \delta v) - u(x, t; v)$ . Из (1), (2) следует, что  $\delta u(x, t)$  является обобщенным решением из  $U$  задачи.

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta(\delta u) + 2|u + \theta \delta u| \delta u + (v + \delta v) \delta u = -u \delta v, \quad (x, t) \in Q, \quad (17)$$

$$\delta u|_S = 0, \quad \delta u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega \quad (18)$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Докажем, что относительно решения задачи (17), (18) справедлива следующая лемма.

**Лемма.** При выше принятых условиях на данные задачи (17), (18) справедлива оценка

$$\|\delta u\|_{W_2}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\delta v\|_{L_4(Q)}^2, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

**Доказательство.** Пусть  $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$  есть полное семейство линейно независимых элементов пространства  $W_2^1(\Omega)$ . В соответствии с методом Фэдо-Галёркина приближенное решение задачи (17), (18) порядка  $N$  определим следующим образом:

$$\delta u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N \xi_{kN}(t) w_k(x), \quad N = 1, 2, \dots,$$

где функции  $\xi_{kN}(t)$  таковы, что удовлетворяются соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u^N}{\partial t^2} w_j dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx + 2 \int_{\Omega} |u + \theta \delta u^N| \delta u^N w_j dx + \int_{\Omega} (v + \delta v) \delta u^N w_j dx = \\ = - \int_{\Omega} u \delta v w_j dx, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\xi_{kN}(0) = 0, \quad \frac{d\xi_{kN}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (21)$$

Соотношения (20) представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $(\xi_{1N}(t), \dots, \xi_{NN}(t))$ . Известные результаты относительно нелинейных систем гарантируют существование единственного решения задачи (20), (21) на отрезке  $[0, t_N]$ ; а из априорных оценок следует, что  $t_N = T$  [9, с 24]

Умножим  $j$ -ое равенство (20) на  $\frac{d\xi_{jN}(t)}{dt}$  и просуммируем результат по  $j = 1, \dots, N$ . Тогда

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2} \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t \partial x_i} \right] dx = -2 \int_{\Omega} |u + \theta \delta u^N| \delta u^N \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx - \int_{\Omega} (v + \delta v) \delta u^N \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx - \int_{\Omega} u \delta v \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx.$$

К обеим частям этого равенства прибавим слагаемое  $2 \int_{\Omega} |\theta \delta u^N| \delta u^N \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx$  и проведем некоторые преобразования

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[ \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{4\theta}{3} |\delta u^N|^3 \right] dx \leq 2 \int_{\Omega} |\theta \delta u^N| - |u + \theta \delta u^N| \left\| \delta u^N \right\| \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right| dx + \\ + \int_{\Omega} |v + \delta v| |\delta u^N| \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right| dx + \int_{\Omega} |u| |\delta v| \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right| dx. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по  $t$  в силу условий (21), используя элементарные неравенства и определение класса допустимых управлений, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i} \right|^2 \right] dx \leq c \int_0^t \int_{\Omega} |u| |\delta u^N| \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right| dx ds + \\ + c \int_0^t \int_{\Omega} \left[ |\delta u^N|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 \right] dx ds + c \|\delta v\|_{L_4(Q)}^2, \quad t \in [0, T] \quad (22) \end{aligned}$$

Из неравенства Гёлдера следует

$$\left| \int_{\Omega} \xi \eta \zeta dx \right| \leq c \|\xi\|_{L_p(\Omega)} \|\eta\|_{L_r(\Omega)} \|\zeta\|_{L_s(\Omega)}, \quad (23)$$

где  $c > 0$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ .

Для  $n = 3$  или  $4$  в неравенстве (23) положим  $p = n$ ,  $r = \frac{2n}{n-2}$ ,  $s = 2$  и

$$\xi = |u|, \quad \eta = |\delta u^N|, \quad \zeta = \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|.$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы, из теоремы Соболева следует, что вложение  $W_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$  непрерывно, а значит,  $U \subset L_{\infty}(0, T; L_r(\Omega))$ . Тогда справедливо включение  $u \subset L_{\infty}(0, T; L_r(\Omega))$ . Учитывая, что  $n \leq r$ , установим, что  $u \subset L_{\infty}(0, T; L_n(\Omega))$ . Пользуясь

неравенством (23), в силу эквивалентности норм в пространстве  $W_2^1(\Omega)$ , из (22) имеем

$$\begin{aligned} \|\delta u^N\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq c \int_0^t \|u(s)\|_{L_n(\Omega)} \cdot \|\delta u^N(s)\|_{L_r(\Omega)} \cdot \left\| \frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} ds + \\ &+ c \int_0^t \left[ \|\delta u^N(s)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] ds + c \|\delta v\|_{L_4(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq c \int_0^t \left[ \|\delta u^N(s)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\delta u^N(s)\|_{L_r(\Omega)}^2 \right] ds + c \|\delta v\|_{L_4(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

сюда, в силу вложения  $W_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ , имеем

$$\|\delta u^N(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \left[ \|\delta u^N(s)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] ds + c \|\delta v\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

откуда по лемме Гронуолла получим

$$\|\delta u^N(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\delta v\|_{L_4(\Omega)}^2, \quad t \in [0, T]. \quad (24)$$

Из неравенства (24) следует, что последовательность  $\{\delta u^N(x, t)\}$  ограничена в  $U$ . Поэтому можно считать, что при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\delta u^N \rightarrow \delta u$  \*-слабо в  $L_\infty\left(0, T; W_2^1(\Omega)\right)$ ,  $\frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \delta u}{\partial t}$  \*-слабо в  $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ .

Известно, что норма слабо полунепрерывна снизу в банаховых пространствах. Поэтому для предельной функции  $\delta u(x, t)$  выполняется оценка (19).

Лемма доказана.

Вычислим приращение функционала  $J(v, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J(v, \tau) &= J(v + \delta v; \tau + \delta \tau) + J(v, \tau) = \int_\tau^{\tau + \delta \tau} dt + \\ &+ \int_0^{\tau + \delta \tau} \int_\Omega \left[ -\frac{\partial(u + \delta u)}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u + \delta u| (u + \delta u) \eta + (v + \delta v)(u + \delta u) \eta - f \eta \right] dx dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\tau \int_\Omega \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u|u\eta + v u \eta - f \eta \right] dx dt = \\
= & \int_\tau^{\tau+\delta\tau} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + 2|u + \theta \delta u| \delta u \eta + (v + \delta v) \delta u \eta - u \delta v \eta \right] dx dt + \\
+ & \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \int_\Omega \left[ -\frac{\partial(u + \delta u)}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u + \delta u|(u + \delta u)\eta + (v + \delta v)(u + \delta u)\eta - f \eta \right] dx dt
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $\eta \in \dot{U}$ , после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
\Delta J(v, \tau) = & \int_0^\tau \int_\Omega u \eta \delta v dx dt + \left( 1 + \int_\Omega \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u|u\eta + uv\eta - f\eta \right] dx \right)_{t=\tau} \delta\tau + \\
& + \int_0^\tau \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + 2|u| \delta u \eta + v \delta u \eta \right] dx dt + R \quad (25)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R = & \int_0^\tau \int_\Omega 2[|u + \theta \delta u| - |u|] \delta u \eta dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta u \delta v \eta dx dt + \\
+ & \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + 2|u + \theta \delta u| \delta u \eta + (v + \delta v) \delta u \eta + u \delta v \eta \right] dx dt + o(\delta\tau).
\end{aligned}$$

является остаточным членом.

Если в формуле (25) в качестве произвольной функции  $\eta(x, t)$  выберем обобщенное решение следующей сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + 2|u| \psi + v \psi = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \tau), \quad (27)$$

$$\psi|_{S=0}, \quad \psi(x, \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

то для приращения функционала получим:

$$\Delta J(v, \tau) = \int_0^\tau \int_\Omega u \psi \delta v dx dt + \left( 1 - \int_\Omega \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial t} dx \right) \delta\tau + R. \quad (29)$$

Поскольку условия на функции  $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$  при  $t = \tau$  отсутствуют, то сопряженная задача (27), (28) имеет бесконечное множество решений.

Отметим, что под обобщенным решением задачи (27), (28) при заданной паре  $(v, t)$  понимается такая функция  $\psi(x, t) \in U$ , что она равна

нулю при  $t = \tau$  и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + 2|u|\psi g + v\psi g \right] dx dt + \int_\Omega \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial t} g(x, \tau) dx = 0.$$

при всех  $g \in U$ , для которых  $g(x, 0) = 0$ .

Из выражения (26) следует, что

$$\begin{aligned} |R| \leq & 2 \int_0^\tau \int_\Omega |\delta u|^2 |\psi| dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega |\delta u| |\delta v| |\psi| dx dt + \\ & + \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \int_\Omega \left[ \left| \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right| + 2|u| |\delta u| |\psi| + 2|\delta u|^2 |\psi| + |v + \delta v| |\delta u| |\psi| + |u| |\delta v| |\psi| \right] dx dt + \\ & + |o(\delta\tau)|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёлдера, отсюда имеем

$$\begin{aligned} |R| \leq & 2 \int_0^\tau \left( \int_\Omega |\delta u|^4 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + \int_0^\tau \left( \int_\Omega |\delta u|^4 dx \right)^{1/4} \left( \int_\Omega |\delta v|^4 dx \right)^{1/4} \left( \int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + \\ & + \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 dx \right)^{1/2} dt + \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} dt + \\ & + 2 \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \left( \int_\Omega |\delta u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |u| |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + 2 \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \left( \int_\Omega |\delta u|^4 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + \\ & + 2 \max(|a|, |b|) \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \left( \int_\Omega |\delta u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + \int_\tau^{\tau+\delta\tau} \left( \int_\Omega |\delta v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{1/2} dt + |o(\delta\tau)|. \end{aligned}$$

Если здесь учесть, непрерывности вложений  $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ , оценку (19), и того, что  $\psi \in U$  получим

$$|R| \leq c \left[ \|\delta v\|_{L_4(Q)} |\delta\tau| + \|\delta v\|_{L_4(Q)}^2 \right] \leq c \left[ \|\delta v\|_{L_4(Q)}^2 + |\delta\tau|^2 \right] + |o(\delta\tau)|. \quad (30)$$

Тогда из формулы (29) и оценки (30) следует, что функционал  $J(v, \tau)$  дифференцируем по Ферме на  $V \times (0, T)$  и справедлива формула

$$\langle J'(w), \delta w \rangle = \int_0^\tau \int_\Omega u \psi \delta v dx + \left( 1 - \int_\Omega \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial t} dx \right) \delta\tau, \quad (31)$$

где  $w = (v, \tau)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены наложенные условия на данные задачи (1), (2). Тогда для оптимальности пары  $(v_*, \tau_*) \in V \times (0, T)$  в задаче быстрогодействия необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\tau_*} \int_{\Omega} u_*(x,t) \psi_*(x,t) (v(x,t) - v_*(x,t)) dx dt + \left( 1 - \int_{\Omega} \frac{\partial u_*(x, \tau_*)}{\partial t} \frac{\partial \psi_*(x, \tau_*)}{\partial t} \partial x \right) (\tau - \tau_*) \geq 0$$

$$\forall (v, \tau) \in V \times (0, T), \quad (32)$$

где  $u_*(x, t)$  и  $\psi_*(x, t)$  нетривиальные решения задач (1), (2) и (27), (28) соответственно при  $(v, \tau) = (v_*, \tau_*)$ .

**Доказательство.** Множество  $V \times (0, T)$  выпукло в  $L_4(Q) \times R$ . Кроме того, функционал  $J(v, \tau)$  дифференцируем по Ферме и его дифференциал в точке  $(v, \tau)$  определяется равенством (31). Тогда на оптимальном элементе  $w_* = (v_*, \tau_*)$  необходимо выполнение неравенства  $\langle J'(w_*), w - w_* \rangle \geq 0 \quad \forall w = (v, \tau) \in V \times (0, T)$  [4, с.28].

Отсюда и из (31) следует справедливость неравенства (32). Теорема 2 доказана.

### Заключение

Таким образом, в работе рассматриваются проблемы задач оптимального управления в смысле быстродействия в процессе описываемого нелинейного гиперболического уравнения. Доказана теорема существования оптимального управления. Предложена схема вывода необходимого условия оптимальности, а именно вычислен дифференциал функционала, доказан, что функционал дифференцируем по Фреше и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтягин Л.С., Болтянский В.Г., Гомкрелидзе Р.В., Мищенко Е. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
3. Габасов Р., Киримова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: БГУ, 1981, 350 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
5. Буковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
6. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.
7. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977
8. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
9. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972, 587 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

# BİR İKİTƏRTİBLİ QEYRİ-XƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN ƏN TEZ TƏSİR MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, Z.R.SƏFƏROVA

## XÜLASƏ

İşdə bir ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün ən tez təsir məsələsi tədqiq olunub. Optimal idarəedicinin varlığı teoremi, funksionalın Freşe mənada diferensiallanan olması isbat olunub və optimallıq üçün variasional bərabərsizlik şəklində zəruri şərt çıxarılıb.

**Açar sözlər:** ən tez təsir məsələsi, qeyri-xətti hiperbolik tənlik, optimallıq şərti

# THE SPEED ACTION PROBLEM FOR THE ONE NONLINEAR SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION

H.F.GULIYEV, Z.R.SAFAROVA

## SUMMARY

The paper investigates the speed action problem for one nonlinear second-order hyperbolic equation. The existence theorem of optimal control is proved, differentiability of functional in the Freche sense and derived the necessary optimality condition in view of a variational inequality.

**Keywords:** speed action problem, nonlinear hyperbolic equation, optimality condition



**MEXANİKA****UDK 622.276.1/4.001.57****SUYUN TƏCRİD YERİNİN NEFTİN SIXIŞDIRILMA ƏMSALINA  
TƏSİRİNİN PROQNOZU****M.S.XƏLİLOV***Bakı Dövlət Universiteti*  
*khalilov\_mubariz@mail.ru*

*Tükənmənin son mərhələsində olan üfüqi yerləşmiş təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən suyun təcrid yerinin neftin sıxışdırılma əmsalına təsiri məsələsi tədqiq edilmişdir.*

**Açar sözlər:** Lay, kondensat, modelləşdirmə, neft, qaz-kondensat.

Neftçixarma sənayesinin inkişafının müasir mərhələsinin ən vacib məsələlərindən biri neft və qaz yataqlarının işlənilmə səmərəliliyinin artırılmasıdır. Neft yataqlarının işlənilmə təcrübəsi göstərir ki, qeyri-bircins kollektorlardan yüksək tempə neft hasilatı vurulan suyun quyuya daha tez çatmasına və hasil olunan quyu məhsulunun sulaşmasına [1,3-6] gətirir.

Bu işə baxılan yatağın işlənilməsinin texniki-iqtisadi göstəricilərini kəfiyyət qədər pisləşdirir. Bununla əlaqədar olaraq neftə görə hasilatın saxlanması şərti hesabına quyuya daxil olan suyun təcrid edilməsi və çıxarılan məhsulda suyun azalmasına qarşı mübarizə üsullarının işlənilməsi problemi əsas məsələ kimi qarşıya qoyulur.

Lay quyularının vaxtından əvvəl sulaşmasının qarşısının alınması üçün bir sıra üsullar mövcuddur: suyun daxil olunmasının qarşısının alınması üçün maneənin yaradılmasının fiziki-kimyəvi üsulları; quyunun optimal iş rejiminin və məhsuldar horizontun sulaşmış hissələrinə minimal təsir yaratmağa hesablanmış- hidrodinamiki üsullar [1-6] və s.

Təcrid etmənin hidrodinamiki üsulları ilə laya lokal təsir etmək yolu ilə su və neft axınının istiqamətini dəyişməklə (idarə etməklə) neftveriminin artırılması imkanları tənzimlənir.

Üfüqi yerləşmiş təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən istismar quyusuna daxil olan suyun vurucu və hasilat quyusu ətrafından təcrid yerinin (gəllə) neftin sıxışdırılma əmsalına təsirinə proqnozu məsələsi praktik əhəmiyyətlidir və onun həll edilməsi zəruridir.

### Məsələnin qoyuluşu və hidroqazdinamik modeli

Keçiriciliyə nəzərən təbəqəli qeyri-bircins üfiqi layda aralarında zəif və orta keçiricilikli araqaçı olduqda və olmadıqda neftin su ilə sıxışdırılması məsələsinə baxılır. Qəbul edilir ki, vurucu və hasilat quyusu nöqtəvi mənbə şəklində layın şaquli sərhədlərinin mərkəzi hissələrində koordinatları uyğun olaraq  $(\frac{l_x}{2}, 0, l_z)$  və  $(\frac{l_x}{2}, l_y, l_z)$  nöqtələrdə yerləşdirilmişdir. Layın xarici sərhədi keçirməz hesab edilir. Vurucu quyuda vurulan suyun həcmi miqdarı verilir və hasilat quyusundan hasil olunan neft və suyun həcmi miqdarları təyin edilir. Neft layının işlənməsinin müəyyən müddətindən sonra hasilat quyusunun sulaşması baş verir və nəticə etibarlı ilə neft hasilatı azalmağa başlayır. Bundan sonra, sulaşmış istismar quyusunun və ya vurucu quyunun ətrafında yüksək-keçiricilikli lay hissəsindən təcrid yerinin yaradılması və yenidən suurma prosesi aparılır.

Qeyri-bircins iki təbəqəli üfiqi layın layları arasında axın olduqda və olmadıqda neftin su ilə sıxışdırılması, sulaşmış istismar quyularının və ya vurucu quyuların ətrafında yüksəkkeçiricilikli layın hissəsindən təcrid yerinin yaradılması və təcrid edilmədən sonra suurma prosesi ikifazlı (su və neft) üçkomponentli (su, neft, gel) süzülmə modeli çərçivəsində aşağıdakı tənliklər sistemi ilə təsvir edilir:

- neftin su ilə sıxışdırılması tənlikləri

$$\begin{aligned} \frac{\partial m s_i}{\partial t} + \operatorname{div} V_{\delta i} &= (-1)^\omega \frac{k_a}{h_a k_i} (V_{\delta 2} - V_{\delta 1}) + \sum_{v=1}^{m_1} Q_{\delta v i}^h(t) \delta(x - x_v^h, y - y_v^h, z - z_v^h) + \\ &+ \sum_{e=1}^{m_2} (Q_{\delta e i}^3(t) + Q_{\delta e i}^2(t)) \delta(x - x_e^3, y - y_e^3, z - z_e^3), \quad i=1,2, \omega=1,2, \\ \sum_{i=1}^2 Q_{\delta v i}^h(t) &= Q_{\delta v}^h(t), \quad \sum_{i=1}^2 Q_{\delta e i}^3(t) = Q_{\delta e}^3(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(1-s_i)}{\partial t} + \operatorname{div} V_{\delta i} &= (-1)^\omega \frac{k_a}{h_a k_i} (V_{\delta 2} - V_{\delta 1}) + \sum_{e=1}^{m_2} Q_{\delta e i}^3(t) \delta(x - x_e^3, y - y_e^3, z - z_e^3), \\ &i=1,2, \end{aligned}$$

$$\omega=1,2, \sum_{i=1}^2 Q_{\delta e i}^3(t) = Q_{\delta e}^3(t), \quad Q_{\delta e}^3(t) = \begin{cases} Q_{\delta e}^0(t), & t < T \\ Q_{\delta e}^3(t), & t \geq T \end{cases} \quad (2)$$

-fazaların birgə cəm axınında su tədricə tərkiyin (gəlin) balans tənliyi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [m s_i c_i + m(1-s_i) \varphi_i(c_i) + a_i(s_i, c_i)] + \operatorname{div}(c_i V_{\delta i} + \varphi_i(c_i) V_{\delta i}) &= \\ = \sum_{e=1}^{m_2} (c_i Q_{\delta e i}^3(t) + \varphi_i(c_i) Q_{\delta e i}^3(t)) \delta(x - x_e^3, y - y_e^3, z - z_e^3) +, \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{div}[D_i(s_i, c_i) \operatorname{grad} c_i], \quad i = 1, 2, \quad c_i(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t < T \\ c_{*i}(x, y, z, t), & t \geq T \end{cases}, \quad (3)$$

- fazaların hərəkət sürəti

$$V_{ei} = -\frac{k_i f_{ei}(s_i, c_i)}{\mu_{ei}(p_{ei}, c_i)} \operatorname{grad} p_{ei}, \quad V_{hi} = -\frac{k_i f_{hi}(s_i, c_i)}{\mu_{hi}(p_{hi}, c_i)} \operatorname{grad} p_{hi}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

- kapilyar tarazlıq tənliyi

$$p_{hi} - p_{ei} = p_{ki}(s_i, c_i), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

burada  $t$ -zaman;  $T$ -su vurmanın başlanğıcından istismar quyusuna suyun daxil olmasına qədər olan zaman;  $x, y, z$  - fəza koordinatları;  $m$  -məsaməlilik;  $s_i$ -su ilə doyma;  $V_{ei}$  və  $V_{hi}$  -su və neft fazalarının süzülmə sürəti;  $c_i$  və  $\varphi_i(c_i)$  -su və neft fazalarında gelin həcmi konsentrasiyaları;  $a_i(s_i, c_i)$  -məsaməli mühitin vahid həcminə hopmuş gelin miqdarı;  $m_1$  və  $m_2$  -uyğun olaraq vurucu və hasilat quyularının sayı;  $(x_v^H, y_v^H, z_v^H)$  və  $(x_e^3, y_e^3, z_e^3)$  -vurucu və istismar quyularının koordinatları;  $Q_{ev}^H(t)$  - $v$ -cü vurucu quyudan vurulan suyun layın vahid hündürlüyünə düşən həcmi sərfi;  $Q_{ee}^3(t)$  və  $Q_{he}^3(t)$  -çıxarılan su və neft fazalarının  $e$  -ci hasilat quyusunda layın vahid hündürlüyünə düşən həcmi sərfələri;  $Q_{he}^3(t)$  - $e$  -ci hasilat quyusunda vurulan tədris xammalının vahid zamanda layın vahid hündürlüyünə düşən həcmi;  $D_i(s_i, c_i) = (D_{xi}(s_i, c_i), D_{yi}(s_i, c_i), D_{zi}(s_i, c_i))$  - tədricetmə xammalının effektiv diffuziya əmsalı vektoru;  $k_i$  -məsaməli mühitin mütləq keçiricilik əmsalı;  $f_{ei}(s_i, c_i)$  və  $f_{hi}(s_i, c_i)$  -mühitdə su və neft fazalarının nəzəri faza keçiricilikləri;  $\mu_{ei}(p_{ei}, c_i)$ ,  $\mu_{hi}(p_{hi}, c_i)$  -su və neft fazalarının özlülükləri;  $p_{ei}$ ,  $p_{hi}$  -su və neft fazalarının təzyiqləri;  $p_{ki}(s_i, c_i)$  -kapilyar təzyiq;  $i = 1, 2$  - indeksi uyğun olaraq birinci və ikinci layı ifadə edir.

Başlanğıc və sərhəd şərtləri

$$s_i(x, y, z, t)|_{t=0} = s_{i0}(x, y, z), \quad c_i(x, y, z, t)|_{t=0} = c_{i0}(x, y, z), \\ (0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_{ei}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial p_{hi}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad 0 \leq z \leq l_z, \\ \frac{\partial p_{ei}}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad \frac{\partial p_{hi}}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq z \leq l_z, \\ \frac{\partial p_{ei}}{\partial z} \Big|_{z=0, l_z} = 0, \quad \frac{\partial p_{hi}}{\partial z} \Big|_{z=0, l_z} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{z=0, l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

burada  $l_x, l_y, l_z$  -uyğun olaraq layın uzunluğu, enivə hündürlüyüdür.

(1)-(7) tənliklər sistemində su ilə doyma  $s_i$ , su fazasında gelin konsentrasiyası  $C_i$  və təzyiq  $P_{\epsilon i}$  naməlumlardır. (1)-(7) sistemindən  $V_{\epsilon i}$ ,  $V_{\eta i}$  -fazaların süzülmə sürətlərini və neft fazasının  $p_{\eta i}$  təzyiqini yox etsək,  $p_{\epsilon i}$ ,  $S_i$  və  $C_i$  -yə nəzərən aşağıdakı məsələ alınar:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\lambda_{s_i} \operatorname{grad} p_{\epsilon i}) + \operatorname{div}(\lambda_{\eta i} \operatorname{grad} p_{k i}) + (-1)^\omega \frac{k_a}{h_a k_i} (\lambda_{\epsilon i} + \lambda_{\eta i}) \operatorname{grad}(p_{\epsilon 2} - p_{\epsilon 1}) + \\ & + (-1)^\omega \frac{k_a}{h_a k_i} \lambda_{\eta i} \operatorname{grad}[(p_{k 2} - p_{k 1})] + \sum_{v=1}^{m_1} Q_{\epsilon v i}^{\eta}(t) \delta(x - x_v^{\eta}, y - y_v^{\eta}, z - z_v^{\eta}) + \\ & + \sum_{e=1}^{m_2} (Q_{\epsilon e i}^{\omega}(t) + Q_{\eta e i}^{\omega}(t)) \delta(x - x_e^{\omega}, y - y_e^{\omega}, z - z_e^{\omega}), \quad i=1,2, \omega=1,2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & m \frac{\partial s_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_{\epsilon i} \operatorname{grad} p_{\epsilon i}) + (-1)^\omega \frac{k_a}{h_a k_i} \lambda_{\epsilon i} \operatorname{grad}(p_{\epsilon 2} - p_{\epsilon 1}) + \\ & + \sum_{v=1}^{m_1} Q_{\epsilon v i}^{\eta}(t) \delta(x - x_v^{\eta}, y - y_v^{\eta}, z - z_v^{\eta}) + \sum_{e=1}^{m_2} Q_{\epsilon e i}^{\omega}(t) \delta(x - x_e^{\omega}, y - y_e^{\omega}, z - z_e^{\omega}), \quad i=1,2, \omega=1,2, \\ & \frac{\partial \lambda_{0 i}}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_{w i} \operatorname{grad} p_{\epsilon i}) + \operatorname{div}(\lambda_{f i} \operatorname{grad} p_{k i}) + \operatorname{div}(D_i(s_i, c_i) \operatorname{grad} c_i) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \sum_{e=1}^{m_2} (c_i \cdot Q_{\epsilon e i}^{\omega}(t) + \varphi_i(c_i) Q_{\eta e i}^{\omega}(t)) \delta(x - x_e^{\omega}, y - y_e^{\omega}, z - z_e^{\omega}), \quad i=1,2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & s_i(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = s_{i0}(x, y, z), \quad c_i(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = c_{i0}(x, y, z), \\ & (0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z), \quad i=1,2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_{\epsilon i}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial s_i}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad (0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z),$$

$$\frac{\partial p_{\epsilon i}}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad \frac{\partial s_i}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad (0 \leq x \leq l_x, 0 \leq z \leq l_z),$$

$$\frac{\partial p_{\epsilon i}}{\partial z} \Big|_{z=0, l_z} = 0, \quad \frac{\partial s_i}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{z=0, l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, \quad i=1,2, \quad (12)$$

Burada

$$\begin{aligned} & \lambda_{s_i} = \lambda_{\epsilon i} + \lambda_{\eta i}, \quad k_i \frac{f_{\epsilon i}(s_i, c_i)}{\mu_{\epsilon i}(p_{\epsilon i}, c_i)} = \lambda_{\epsilon i}, \quad k_i \frac{f_{\eta i}(s_i, c_i)}{\mu_{\eta i}(p_{\epsilon i}, c_i)} = \lambda_{\eta i}, \quad c_i \lambda_{\epsilon i} + \varphi_i(c_i) \lambda_{\eta i} = \lambda_{w i}, \\ & m s_i c_i + m(1 - s_i) \varphi_i(c_i) + a_i(s_i, c_i) = \lambda_{0 i}, \quad \varphi_i(c_i) \cdot \lambda_{\eta i} = \lambda_{f i}. \end{aligned}$$

**Qeyd:** Keçiriciliyə nəzərən təbəqəli qeyri-bircins üfiqi layın layları arası axın olmadıqda neftin su ilə sıxışdırılması zamanı istismar və ya vurucu quyuların ətrafında yüksək keçiricilikli lay hissəsindən işlənilmənin müəyyən müddətində tədric yerinin yaradılması və yenidən suurma prosesi (1)-(7) məsələsində

$k_a = 0$  və layların kontakt sərhəddində suyun, neftin təzyiq və sürətlərinin bərabərliyi qəbul edilməklə modelləşdirilir.

### Ədədi həll sxemi

$P_{ei}$ ,  $S_i$  və  $-ni$  təyin etmək üçün fəza və zamana görə  $\omega = \omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z \cdot \omega_t$  sonlu fərqlər şəbəkəsi daxil edək

$$\omega_x = \{x_e, e = \overline{0, N_x}; x_0 = 0, x_{N_x} = L_x, x_{e-1} \leq x_e \leq x_{e+1}, e = \overline{1, N_{x-1}}\},$$

$$\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y}; y_0 = 0, y_{N_y} = L_y, y_{j-1} \leq y_j \leq y_{j+1}, j = \overline{1, N_{y-1}}\},$$

$$\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z}; z_0 = 0, z_{N_z} = L_z, z_{k-1} \leq z_k \leq z_{k+1}, k = \overline{1, N_{z-1}}\},$$

$$\omega_t = \{t_n = n\Delta\tau, n = \overline{0, 1, 2, \dots}, t_0 = 0, t_{n+1} \geq t_n\},$$

və (8)-(12) tənliklər sisteminə qeyri-müntəzəm şəbəkədə integral-interpolasiya üsulunu [2] tətbiq etməklə birinci tərtib konservativ sonlu-fərqlər sxemi ilə aşağıdakı şəkildə aproksimasiya etmək olar:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_e} \left[ \lambda_{sie+1/2,j,k}^{n+1} \frac{P_{eie+1,j,k}^{n+1} - P_{eie,j,k}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - \lambda_{sie-1/2,j,k}^{n+1} \frac{P_{eie,j,k}^{n+1} - P_{eie-1,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \lambda_{sie,j+1/2,k}^{n+1} \frac{P_{eie,j+1,k}^{n+1} - P_{eie,j,k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{sie,j-1/2,k}^{n+1} \frac{P_{eie,j,k}^{n+1} - P_{eie,j-1,k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta z_k} \left[ \lambda_{sie,j,k+1/2}^{n+1} \frac{P_{eie,j,k+1}^{n+1} - P_{eie,j,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} - \lambda_{sie,j,k-1/2}^{n+1} \frac{P_{eie,j,k}^{n+1} - P_{eie,j,k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta x_e} \left[ \lambda_{nie+1/2,j,k}^{n+1} \frac{P_{kie+1,j,k}^{n+1} - P_{kie,j,k}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - \lambda_{nie-1/2,j,k}^{n+1} \frac{P_{kie,j,k}^{n+1} - P_{kie-1,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \lambda_{nie,j+1/2,k}^{n+1} \frac{P_{kie,j+1,k}^{n+1} - P_{kie,j,k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{nie,j-1/2,k}^{n+1} \frac{P_{kie,j,k}^{n+1} - P_{kie,j-1,k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta z_k} \left[ \lambda_{nie,j,k+1/2}^{n+1} \frac{P_{kie,j,k+1}^{n+1} - P_{kie,j,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} - \lambda_{nie,j,k-1/2}^{n+1} \frac{P_{kie,j,k}^{n+1} - P_{kie,j,k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] + \\ & + (-1)^\omega \frac{k_{a,e,j,k}^n}{h_{a,e,j,k}^n k_{ie,j,k}^n} (\lambda_{eie,j,k}^n + \lambda_{nie,j,k}^n) \left[ \frac{1}{\Delta x_e} (P_{\delta 2e+1,j,k}^{n+1} - P_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - \right. \\ & - P_{\delta 1e+1,j,k}^{n+1} + P_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y_j} (P_{\delta 2e,j+1,k}^{n+1} - P_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - P_{\delta 1e,j+1,k}^{n+1} + P_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) + \\ & \left. + \frac{1}{\Delta z_k} (P_{\delta 2e,j,k+1}^{n+1} - P_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - P_{\delta 1e,j,k+1}^{n+1} + P_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^\omega \frac{k_{a,e,j,k}^n}{h_{a,e,j,k}^n k_{ie,j,k}^n} \lambda_{ie,j,k}^n \left[ \frac{1}{\Delta x_e} (p_{k2e+1,j,k}^{n+1} - p_{k2e,j,k}^{n+1} + \right. \\
& - p_{k1e+1,j,k}^{n+1} + p_{k1e,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y_j} (p_{k2e,j+1,k}^{n+1} - p_{k2e,j,k}^{n+1} - p_{k1e,j+1,k}^{n+1} + p_{k1e,j,k}^{n+1}) + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta z_k} (p_{k2e,j,k+1}^{n+1} - p_{k2e,j,k}^{n+1} - p_{k1e,j,k+1}^{n+1} + p_{k1e,j,k}^{n+1}) \right] + \\
& + \sum_{v=1}^{m_1} Q_{\delta vi}^{\delta^3}(t_n) \bar{\delta}_{e,j,k}^{\delta^3} + \sum_{e=1}^{m_2} (Q_{\delta ei}^{\delta^3}(t_n) + Q_{\delta ei}^{\delta^3}(t_n)) \bar{\delta}_{e,j,k}^{\delta^3}, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{ie,j,k}^{n+1} = s_{ie,j,k}^n & + \frac{\Delta \tau}{m_{ie,j,k}} \left\{ \frac{1}{\Delta x_e} \left[ \lambda_{ie+1/2,j,k}^{n+1} \frac{p_{ie+1,j,k}^{n+1} - p_{ie,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} - \right. \right. \\
& - \lambda_{ie-1/2,j,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k}^{n+1} - p_{ie-1,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \left. \right] + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \lambda_{ie,j+1/2,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j+1,k}^{n+1} - p_{ie,j,k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \right. \\
& - \lambda_{ie,j-1/2,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k}^{n+1} - p_{ie,j-1,k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \left. \right] + (-1)^\omega \frac{k_{a,e,j,k}^n}{h_{a,e,j,k}^n k_{ie,j,k}^n} \lambda_{ie,j,k}^n \left[ \frac{1}{\Delta x_e} (p_{\delta 2e+1,j,k}^{n+1} - \right. \\
& - p_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - p_{\delta 1e+1,j,k}^{n+1} + p_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y_j} (p_{\delta 2e,j+1,k}^{n+1} - p_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - p_{\delta 1e,j+1,k}^{n+1} + p_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta z_k} (p_{\delta 2e,j,k+1}^{n+1} - p_{\delta 2e,j,k}^{n+1} - p_{\delta 1e,j,k+1}^{n+1} + p_{\delta 1e,j,k}^{n+1}) \right] + \sum_{v=1}^{m_1} Q_{\delta vi}^{\delta^H}(t_n) \bar{\delta}_{e,j,k}^{\delta^H} + \sum_{e=1}^{m_2} Q_{\delta ei}^{\delta^3}(t_n) \bar{\delta}_{e,j,k}^{\delta^3} \left. \right\}, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{ie,j,k}^{n+1} = c_{ie,j,k}^n & + \frac{\Delta \tau}{L_{ie,j,k}^n} \left\{ \frac{1}{\Delta x_e} \left[ D_{ie+1/2,j,k}^{n+1} \frac{c_{ie+1,j,k}^{n+1} - c_{ie,j,k}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - D_{ie-1/2,j,k}^{n+1} \frac{c_{ie,j,k}^{n+1} - c_{ie-1,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ D_{ie,j+1/2,k}^{n+1} \frac{c_{ie,j+1,k}^{n+1} - c_{ie,j,k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - D_{ie,j-1/2,k}^{n+1} \frac{c_{ie,j,k}^{n+1} - c_{ie,j-1,k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} \left[ D_{ie,j,k+1/2}^{n+1} \frac{c_{ie,j,k+1}^{n+1} - c_{ie,j,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} - D_{ie,j,k-1/2}^{n+1} \frac{c_{ie,j,k}^{n+1} - c_{ie,j,k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta x_e} \left[ \lambda_{wi+1/2,j,k}^{n+1} \frac{p_{ie+1,j,k}^{n+1} - p_{ie,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} - \lambda_{wi-1/2,j,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k}^{n+1} - p_{ie-1,j,k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \lambda_{wi,j+1/2,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j+1,k}^{n+1} - p_{ie,j,k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{wi,j-1/2,k}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k}^{n+1} - p_{ie,j-1,k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} \left[ \lambda_{wi,j,k+1/2}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k+1}^{n+1} - p_{ie,j,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} - \lambda_{wi,j,k-1/2}^{n+1} \frac{p_{ie,j,k}^{n+1} - p_{ie,j,k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta x_e} \left[ \lambda_{fi\ e+1/2, j, k}^{n+1} \frac{P_{ki\ e+1, j, k}^{n+1} - P_{ki\ e, j, k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} - \lambda_{fi\ e-1/2, j, k}^{n+1} \frac{P_{ki\ e, j, k}^{n+1} - P_{ki\ e-1, j, k}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \lambda_{fi\ e, j+1/2, k}^{n+1} \frac{P_{ki\ e, j+1, k}^{n+1} - P_{ki\ e, j, k}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{fi\ e, j-1/2, k}^{n+1} \frac{P_{ki\ e, j, k}^{n+1} - P_{ki\ e, j-1, k}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} \left[ \lambda_{fi\ e, j, k+1/2}^{n+1} \frac{P_{ei\ e, j, k+1}^{n+1} - P_{ei\ e, j, k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} - \lambda_{fi\ e, j, k-1/2}^{n+1} \frac{P_{ei\ e, j, k}^{n+1} - P_{ei\ e, j, k-1}^{n+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] - \\
& - M_{ie, j, k}^n \frac{s_{ie, j, k}^{n+1} - s_{ie, j, k}^n}{\Delta \tau} + \sum_{e=1}^{m_2} (c_{ie, j, k}^n Q_{\theta ei}^{\vartheta}(t_n) + \varphi_{ie, j, k}^n Q_{\theta ei}^{\vartheta}(t_n)) \bar{\delta}_{e, j, k}^{\vartheta} \left. \right\}, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{ie, j, k}^0 &= s_{0i}(x_e, y_j, z_k), \quad c_{ie, j}^0 = c_{0i}(x_i, y_j), \quad (0 \leq e \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq k \leq N_z), \quad (16) \\
P_{ei1, j, k}^{n+1} &= P_{ei0, j, k}^{n+1}, \quad P_{ei N_x, j, k}^{n+1} = P_{ei N_x-1, j, k}^{n+1}; \quad P_{ei e, 1, k}^{n+1} = P_{ei e, 0, k}^{n+1}, \quad P_{ei e, N_y, k}^{n+1} = P_{ei e, N_y-1, k}^{n+1}; \\
P_{ei e, j, 1}^{n+1} &= P_{ei e, j, 0}^{n+1}, \quad P_{ei e, j, N_z}^{n+1} = P_{ei e, j, N_z-1}^{n+1}; \\
S_{ie, j, k}^{n+1} &= S_{ie, j, k}^{n+1}, \quad S_{ie, j, k}^{n+1} = S_{ie, j, k}^{n+1}; \quad S_{ie, 1, k}^{n+1} = S_{ie, 0, k}^{n+1}, \quad S_{ie, N_y, k}^{n+1} = S_{ie, N_y-1, k}^{n+1}; \\
S_{ie, j, 1}^{n+1} &= S_{ie, j, 0}^{n+1}, \quad S_{ie, j, N_z}^{n+1} = S_{ie, j, N_z-1}^{n+1}; \\
C_{ie, j, k}^{n+1} &= C_{ie, j, k}^{n+1}, \quad C_{ie, j, k}^{n+1} = C_{ie, j, k}^{n+1}; \quad C_{ie, 1, k}^{n+1} = C_{ie, 0, k}^{n+1}, \quad C_{ie, N_y, k}^{n+1} = C_{ie, N_y-1, k}^{n+1}; \\
C_{ie, j, 1}^{n+1} &= C_{ie, j, 0}^{n+1}, \quad C_{ie, j, N_z}^{n+1} = C_{ie, j, N_z-1}^{n+1}; \quad (0 \leq e \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq k \leq N_z). \quad (17)
\end{aligned}$$

**Burada**

$$\begin{aligned}
M_{ie, j, k}^n &= m_{ie, j, k}^n c_{ie, j, k}^n - m_{ie, j, k}^n \varphi_{ie, j, k}^n + a_{sie, j, k}^n; \\
L_{ie, j, k}^n &= m_{ie, j, k}^n s_{ie, j, k}^n + m_{ie, j, k}^n (1 - s_{ie, j, k}^n) \varphi_{ie, j, k}^n + a_{cie, j, k}^n; \\
\bar{\delta}_{e, j, k}^n &= \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \neq x_v^n, y_j \neq y_v^n, z_k \neq z_v^n \\ 1, & \text{если } x_i = x_v^n, y_j = y_v^n, z_k = z_v^n \end{cases}; \\
\bar{\delta}_{e, j, k}^{\vartheta} &= \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \neq x_e^{\vartheta}, y_j \neq y_e^{\vartheta}, z_k \neq z_e^{\vartheta} \\ 1, & \text{если } x_i = x_e^{\vartheta}, y_j = y_e^{\vartheta}, z_k = z_e^{\vartheta} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Tam aşağı indekslər şəbəkənin düyün nöqtələrində, yarımtam indekslər isə hesablama bloklarının sərhəddində dəyişənlərin qiymətlərini işarə edirlər.

(13)-(17) tənliklər sistemi  $P_{ie, j, k}^{n+1}$ ,  $S_{ie, j, k}^{n+1}$  və  $C_{ie, j, k}^{n+1}$  ( $1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y, 1 \leq k \leq N_z$ ) naməlumlarına nəzərən qeyri-xəttidir. Bu sistemin həlli üçün iterasiya üsullarından [13] istifadə edilmişdir. Təzyiq və konsentrasiyaya görə iterasiyalı - nöqtəvi Ya-kobi üsulundan, su ilə doymaya görə isə Eyler üsulundan [2] istifadə olunmuşdur.

**Quyunun modelləşdirilməsi:** Quyuları nəzərə alan  $Q_{fe}(t)$ , ( $f = H, \theta$ )

funksiyası təzyiqlər  $p_{ei}(x_{ew}, y_{jw}, z_{kw}, t)$  və  $p_{ei}(t) = p_{ei}(x_e, y_j, z_k, t)$  olduqda

$(r_w, z_k^{\min})$  və  $(r_k, z_k^{\max})$  silindrləri ilə məhdudlanmış daxili oblastda axının iki-fazlı kvaziqərarlaşmış olmasına baxılmaqla modelləşdirilir. [13,124]-dən istifadə etməklə yazmaq olar:

$$Q_{fe}(t) = \bar{\varphi}_f(p_e, s, c) Q_e(t), \quad (18)$$

burada

$$\bar{\varphi}_{ii}(p_{ei}, s_i, c_i) = \frac{\lambda_{ii}(p_{ei}, s_i, c_i)}{\lambda_{ii}(p_{ei}, s_i, c_i) + \lambda_{ei}(p_{ei}, s_i, c_i)}, \quad \bar{\varphi}_{ei}(p_{ei}, s_i, c_i) = 1 - \bar{\varphi}_{ii}(p_{ei}, s_i, c_i),$$

$$\bar{\varphi}_f(p_e, s, c) = \sum_{i=1}^2 \bar{\varphi}_{fi}(p_{ei}, s_i, c_i),$$

$$Q_e(t) = \frac{2\pi h}{\ln \frac{r_k}{r_w}} \sum_{i=1}^2 \int_{p_{ei}(x_w, y_w, z_w, t)}^{p_{ei}(t)} \{\lambda_{ii}(p_{ei}, s_i, c_i) + \lambda_{ei}(p_{ei}, s_i, c_i)\} dp_{ei}, \quad r_k = \sqrt{\Delta x \Delta y / \pi}.$$

$Q_e(t)$  -ümumi sərfiyyat;  $\bar{\varphi}_H$  və  $\bar{\varphi}_e$  -uyğun olaraq axında neft və suyun miqdarlarıdır. Lay şəraitində vahid həcmə düşən  $Q_e(t)$  debiti (6) tənliyindən bir-qiyətməli təyin olunur.

### Test hesablamının nəticələri

Təklif olunan hesablama üsulu ilə təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən istismar quyusuna daxil olan suyunvurucu və hasilat quyusu ətrafından təcrid yerinin layın neftvermə əmsalına təsirinin test hesablamaları aparılmışdır.

Neftin sıxışdırılması su vurma yolu ilə sabit 2,4 MPa -a bərabər olan hidrodinamik təzyiq düşküsündə aparılır (şəkil 1). Təbəqəli qeyri-bircins layda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən istismar quyusuna daxil olan suyun vurucu və hasilat quyusu ətrafından təcridi (gellə izolyasiya) modelləşmədə izolyasiya dərəcəsi əmsalı

$$k_{iz} = \frac{f_e(s, c)}{f_{en}(s, c)}$$

ilə nəzərə alınır. Burada  $k_{iz}$  -izolyasiya əmsalı;  $f_e(s, c)$  -izolyasiyaya qədər (təcridə qədər) suya görə nəzəri faza keçiriciliyi;  $f_{en}(s, c)$  -izolyasiyadan sonra (təcriddən sonra) suya görə nəzəri faza keçiriciliyidir. Gelin xassələrindən asılı olaraq  $k_{iz}$  -in qiyməti müxtəlif intervallarda dəyişə bilər.

Hesablamalarda lay parametrlərinin qiymətləri və həmçinin mayelərin xassələri üçün, [4-7] işlərində istifadə olunan aşağıdakı bəzi verilənlərdən istifadə edilmişdir:

$$l_x = 500M; \quad l_y = 250M; \quad l_z = 50M; \quad Q_{ev}^u(t) = 320 \frac{M^3}{cym}; \quad k_1 = 10^{-12} M^2 (0 \leq z \leq 22.5M)$$

$$k_a = 10^{-15} M^2 (22.5 \leq z \leq 27.5M); \quad k_2 = 0.5 \cdot 10^{-12} M^2 (27.5 \leq z \leq 50M); \quad \varphi_i(c_i) = c_i / 2;$$

$$s_{i0}(x, y, z) = 0.2; \quad c_{i0}(x, y, z) = 0; \quad a_i(s_i, c_i) = 0; \quad i = 1, 2,$$

$$\mu_{ei}(p_{ei}, c_i) = 1 + 0.55c_i - 0.3c_i^2 (MПа \cdot c); \quad \mu_{ii}(p_{ii}, c_i) = 14.6 - 14.7c_i + 5.5c_i^2 (MПа \cdot c); \quad i = 1, 2,$$

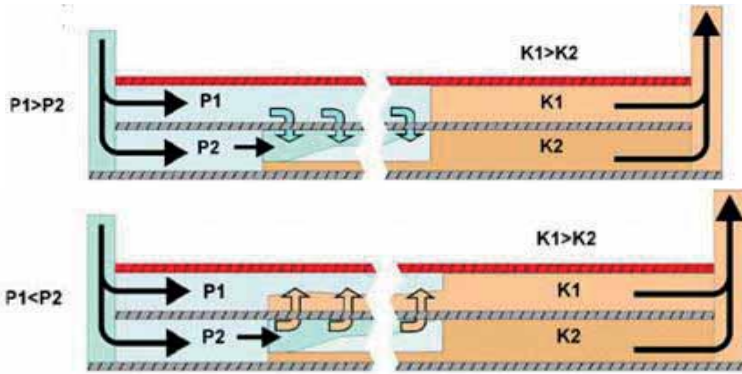


$$f_{ai}(s_i, c_i) = \begin{cases} 0, & s_i \leq 0.2 \\ \left( \frac{s_i - 0.2}{0.81} \right)^3, & 0.2 \leq s_i \leq 1 \end{cases};$$

$$f_{ii}(s_i, c_i) = \begin{cases} \left[ \left( \frac{0.83 - s_i}{0.834} \right)^3 - \left( \frac{0.74 - s_i}{0.715} \right)^3 \right] c_i + \left( \frac{0.74 - s_i}{0.74} \right)^3, & 0 \leq s_i \leq 0.74 \\ \left( \frac{0.83 - s_i}{0.834} \right)^3 c_i, & 0.74 \leq s_i \leq 0.83 \\ 0, & s_i \geq 0.83 \end{cases};$$

$$p_{ki}(s_i, c_i) = \Pi \cdot J_i(s_i); \quad J_i(s_i) = \frac{0.2(0.9 - s_i)}{(1.2 - s_i)^2(2s_i - s_i^2)}; \quad D_i(s_i, c_i) = D_0 \cdot (2 - s_i), \quad \Pi = 10^5 \text{ Pa},$$

$$D_0 = 10^{-5} \text{ M}^2 / \text{c}; \quad C_*(x, y, z, T) = 0; \quad C_*(x_e^3, y_e^3, z_e^3, t) = 0.05; \quad ; k_{iz} \geq 30.$$



**Şəkil 1.** Lay modelinin sxemi

Aşağıdakı mərhələlərin hesablamaları aparılmışdır:

**I Mərhələ.** Bu baza mərhələsi olmaqla, təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda neftin su ilə sıxışdırılması rejimində işlənilməsi ilə xarakterizə olunur.

**II Mərhələ.** Təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda istismar quyusuna daxil olan suyun yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından təcridi prosesi tətbiq edilir.

**III Mərhələ.** Təbəqəli qeyri-bircins layın layları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından suya qarşı təcrid edilmədən sonra, su ilə sıxışdırma rejimində layın istismara buraxılması araşdırılır.

I variantda iki təbəqəli layda neftin su ilə sıxışdırılmasında (baza variantı) laylar arası axının olduğu və olmadığı halların neftvermə əmsalına təsirinin hesablamaları aparılmışdır. Hesablama nəticələri göstərir ki, laylar arası axının olduğu halda neftvermə əmsalılaylar arası axının olmadığı halla müqayisədə daha yüksək olur (cədvəl 1).

II variantda iki təbəqəli layda neftin su ilə sıxışdırılmasında istismar quyusuna daxil olan suyun yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından təcridi və sonradan sıxışdırma prosesində laylar arası axının

olduğu və olmadığı halların neftvermə əmsalına təsirinin hesablamaları aparılmışdır. Hesablama nəticələri göstərir ki, laylar arası axının olmadığı halda neftvermə əmsalı vurucuquyu ətrafından suya qarşı təcrid halında hasilat quyusu ətrafından suya qarşı təcrid hali ilə müqayisədə daha böyük olur və hasilat quyusunun sulaşması azaldıqca bu böyümə daha da çox olur. Laylar arası axının olduğu halda hasilat quyusu ətrafından suya qarşı təcriddə neftvermə əmsalı vurucu quyu ətrafında təcridlə müqayisədə böyük olur və hasilat quyusunun sulaşması azaldıqca böyümə daha intensiv olur (cədvəl 2, 3).

Cədvəl 1

**İki təbəqəli layda neftin su ilə sıxışdırılması nəticələri**

Sulaşma, %	Axın nəzərə alındıqda			Axın nəzərə alınmadıqda		
	Neftvermə əmsalı			Neftvermə əmsalı		
	Təcridə qədər		Lay üzrə ortalaşmış qiyməti	Təcridə qədər		Lay üzrə ortalaşmış qiyməti
	I lay	II lay		I lay	II lay	
96	0,4723	0,6131	0,5427	0,4937	0,5893	0,5415
50	0,1206	0,3896	0,2551	0,1103	0,3740	0,2421
38	0,1093	0,3726	0,2409	0,0998	0,3567	0,2282

Cədvəl 2

**İki təbəqəli layda suyun yüksəkkeçiricilikli lay hissəsində vurucu quyu ətrafından təcridi**

Sulaşma, %	Axın nəzərə alındıqda			Axın nəzərə alınmadıqda		
	Neftvermə əmsalı			Neftvermə əmsalı		
	Təcridən sonra (mötərizədə təcridin dərəcəsi göstərilib)		Lay üzrə orta qiyməti	Təcridən sonra (mötərizədə təcridin dərəcəsi göstərilib)		Lay üzrə orta qiyməti
	I lay	II lay		I lay	II lay	
96	0,4502(30)	0,6404(30)	0,5453	0,5741(30)	0,6405(30)	0,6073
50	0,139(30)	0,4308(30)	0,2849	0,5745(30)	0,6551(30)	0,6148
38	0,1306(30)	0,4146(30)	0,2726	0,5746(30)	0,6567(30)	0,6156

Laylar arası axının olduğu halda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən təcrid (həm vurucu və həm də hasilat quyusu ətrafından) nəticələrinin yekunu olaraq neftvermə əmsalı yüksəkkeçiricilikli laya nəzərən zəifkeçiricilikli layda az olur. Laylar arası axının olduğu halda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən hasilat quyusu ətrafından təcriddə neftvermə əmsalı vurucu quyu ətrafında təcridin nəticələrinə nəzərən böyük olur (cədvəl 3).

Cədvəl 3

**İki təbəqəli layda suyun yüksəkkeçiricilikli lay hissəsində hasilat quyusu ətrafından təcridi**

Sulaşma, %	Axın nəzərə alındıqda			Axın nəzərə alınmadıqda		
	Neftvermə əmsalı			Neftvermə əmsalı		
	Təcridən sonra (mötərizədə təcridin dərəcəsi göstərilib)		Lay üzrə orta qiyməti	Təcridən sonra (mötərizədə təcridin dərəcəsi göstərilib)		Lay üzrə orta qiyməti
	I lay	II lay		I lay	II lay	
96	0,5053(30)	0,6711(30)	0,5882	0,5745(30)	0,6416(30)	0,6080
50	0,4582(30)	0,725(30)	0,5916	0,5745(30)	0,6407(30)	0,6076
38	0,456(30)	0,7359(30)	0,5960	0,5745(30)	0,6404(30)	0,6074

Hesablama sxemi əsasında təbəqəli qeyri-bircins layınlayları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından suya qarşı təcrid edilmədən sonra, su ilə sıxışdırma rejimində layın istismara buraxılmasında praktiki əhəmiyyətli olan təcrid materialının sulaşma dərəcəsinə görə yuyulma vaxtının təyini aparılmış və nəticələr cədvəl 4-də gətirilmişdir. İki təbəqəli qeyri-bircins layınlayları arası axın olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından suya qarşı təcridin yuyulma vaxtı layları arası axının olduğu halla müqayisədə kifayət qədər yüksəkdir. Bu zəifkeçiricilikli laydan yüksəkkeçiricilikli laya su axını olmadıqda təcrid materialına birtərəfli qaydada su basqısının olması ilə izah oluna bilər və ona görə də onun yuyulması kifayət qədər ləng baş verir. Su axını olduqda isə təcrid materialı iki tərəfli qaydada su basqısının təsiri altında olduğundan onun yuyulması kifayət qədər sürətli olur.

Cədvəl 4

**İki təbəqəli qeyri-bircins layda layları arası axın olduqda və olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafından suyun təcridinin yuyulma vaxtı**

Sulaşma, %	İki təbəqəli layda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu quyu ətrafından suyun təcridi		İki təbəqəli layda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən hasilat quyusu ətrafından suyun təcridi	
	Axın nəzərə alındıqda	Axın nəzərə alınmadıqda	Axın nəzərə alındıqda	Axın nəzərə alınmadıqda
	Yuyulma vaxtı (gün)	Yuyulma vaxtı (gün)	Yuyulma vaxtı (gün)	Yuyulma vaxtı (gün)
96	134	217	169	218
50	78	294	141	298
38	76	324	135	299

Beləliklə, fluidlərin ikifazlı üçkomponentli təklif olunan hidrodinamik modeli təbəqəli qeyri-bircins layda neftin su ilə sıxışdırılması və hasilat quyusunun sulaşmasından sonra suyun yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və ya hasilat quyusu ətrafından təcridini modelləşdirməyə və suyun etibarlı təcridi üçün quyudibi zonaya vurulan təcrid materialının həcmi, təcrid prosesinin başlanmasını və təcriddən sonra işlənilmənin texniki-texnoloji göstəricilərini təyin etməyə imkan verir.

**Nəticələr:**

1. Neftin su ilə sıxışdırılmasında layları arası axın olduqda neftvermə əmsalı axın olmadığı hala nəzərən yüksək olur.
2. Laylar arası axın olmadıqda lay üzrə neftvermə əmsalı vurucu quyu ətrafında təcrid zamanı hasilat quyusu ətrafında təcridlə müqayisədə böyük olur və onun qiyməti hasilat quyusunun sulaşma faizi aşağı olduqca daha yüksək olur.
3. Laylar arası axın olduqda hasilat quyusu ətrafında təcrid zamanı üzrə neftvermə əmsalı vurucu quyu ətrafında təcridlə müqayisədə daha böyük olur və onun qiyməti hasilat quyusunun sulaşma faizi az olduqcadaha yüksək olur.

4. Laylar arası axın olmadıqda yüksəkkeçiricilikli lay hissəsindən vurucu və hasilat quyusu ətrafında suyun təcridinin yuyulma vaxtılaylar arası axının olduğu halla müqayisədə kifayət qədər yüksək olur.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Абасов М.Т., Стреков А.С., Эфендиев Г.М. Повышение эффективности ограничения водопритоков в нефтяных скважинах. Баку: Nafta-Press, 2009, 256с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.
3. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989, 232с.
4. Старковский В.А. Обоснование технологии селективной изоляции притока воды в добывающих скважинах на нефтяных месторождениях композициями на основе щелочных силикатных гелей: Автореферат дис. канд.тех.наук. ОАО “ВНИИнефть”, 2013, 25 с.
5. Фейзуллаев Х.А. Особенности влияния неоднородности коллектора на процесс обработки призабойных зон газоконденсатных скважин “сухим” газом // Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2008, №3, с.43-51
6. Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С., Кулиев Э.А., Магеррамов С.Д. Моделирование газового воздействия на газоконденсатный пласт на завершающей стадии разработки // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. Москва ОАО, ВНИИОЭНГ, М., 2018, №8, с.48-52

#### ПРОГНОЗ ВЛИЯНИЯ МЕСТА ВОДОИЗОЛЯЦИИ НА КОЭФФИЦИЕНТ СЖАТИЯ НЕФТИ

М.С.ХАЛИЛОВ

#### РЕЗЮМЕ

Изучено влияние изоляции воды из высокопроницаемого пласта на степень сжатия нефти при наличии или отсутствии потока между горизонтально-слоистыми неоднородными пластами на заключительной стадии истощения.

**Ключевые слова:** пласт, конденсат, моделирование, нефть, газовый конденсат.

#### FORECAST OF WATER INSULATION IN PLACES OF OIL CONSERVATION

M.S.KHALILOV

#### SUMMARY

The effect of water isolation from a highly permeable formation on the degree of compression of oil in the presence or absence of a flow between horizontally-layered heterogeneous layers at the final stage of the source.

**Keywords:** Layer, condensate, modeling, oil, gas condensate.

UOT 539.2-18

**ZƏRBƏDƏN YARANAN HƏYƏCANLANMALARIN  
TƏSİRİ ALTINDA EMULSİYALARININ  
AYRILMA PROSESLƏRİNİN TƏDQIQI****N.B.NAĞIYEVA***AMEA, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu  
nezrin.mansurzade@mail.ru*

*Təqdim olunan işdə su-neft qarışığının xarici təsir olmadan və zərbədən yaranan həyəcanlanmaların emulsiya ayrılma prosesinə təsiri nəzəri və təcrübi olaraq araşdırılmışdır. Həyəcanlanmaların təsirinin artması ilə emulsiya ayrılmalarının çox olması müşahidə olunmuşdur. Tədqiqatın nəticələri quyudaxili mayenin demulsasiyası prosesini tənzimləmək üçün praktiki tövsiyələrin və metodların hazırlanmasında əsas ola bilər.*

**Açar sözlər:** heterogen sistemlər, həyəcanlanmalar, emulsiya, amplituda

Neft yataqlarının istismarı zamanı çıxarılan məhsulda istismar müddətindən asılı olaraq suyun miqdarı dəyişilir. Belə şəraitdə neftin lay suyu ilə qarışması və emulsiya əmələ gəlmə prosesi baş verir.

Neft və suyun qarışması zamanı emulsiya yaranma lay daxilində və ya quyuyu avadanlıqlarının işlədiyi zamanı (nasoslar) baş verir.

Emulsiya su və neftin çox müxtəlif nisbətlərində ola bilər. Əksər hallarda emulsiyada olan su, dispers hissəciklər şəklində yaranır [1, 2].

Flüidlərin quyuya axması zamanı bir sıra hallarda suyun nefti qabaqlaması halı müşahidə edilir. Energetik nöqtəyi-nəzərdən, sistemin bu halı dayanıqlı hal olmur.

Əgər quyuda mayelərin bir-birinə nəzərən yerdəyişməsi, daha doğrusu, suyun sıxlıqlara görə yerdəyişməsi baş verərsə, sistemin işlənməsində ümumi enerjisi azala bilər.

Sistemin dəyişdirilməsi üçün kiçik həyəcanlanma kifayət edə bilər ki, bunun nəticəsində sərbəst enerji mayenin qaldırılmasında daha effektiv olsun.

Demulsasiya prosesi həm xarici təsir olmadan, yəni qravitasiya qüvvəsinin təsirindən, həm də xarici zərbədən yaranan həyəcanlanmalarının təsirindən baş verə bilər [3, 4].

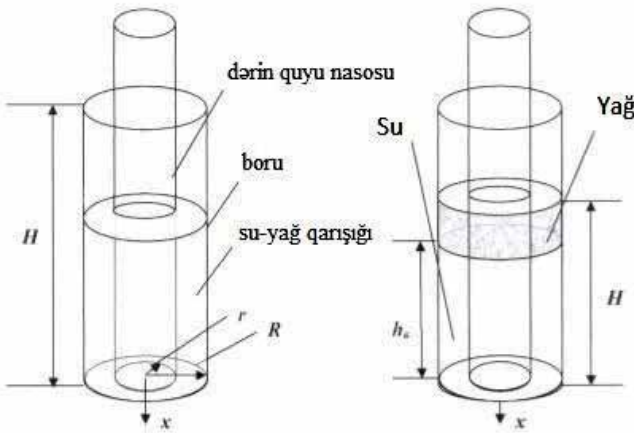
Əgər sistem dayanıqlı müvazinət halında olarsa, həyəcanlanma zamanından asılı olaraq sönür və emulsiya stabil qalır. Dayanıqsız müvazinət halında isə həyəcanlanma zamanla artır və bu da sistemin yeni halı ilə müşayiət olunur.

**Məsələnin qoyuluşu və həlli.** Flüidlərin quyuya axması zamanı bir sıra hallarda suyun nefti qabaqlaması halı müşahidə edilir. Energetik nöqtəyi nəzərdən, sistemin bu halı dayanıqlı hal olmur. Əgər sistem dayanıqlı müvazinət halında olarsa, həyəcanlanma zamandan asılı olaraq sönmür və emulsiya stabil qalır. Dayanıqsız müvazinət halında isə həyəcanlanma zamanla artır və bu da sistemin yeni halı ilə müşayiət olunur.

Bu məqsədlə, aparılan tədqiqatda su-neft qarışığının xarici təsir olmadan və zərbədən yaranan həyəcanlanmaların emulsiya prosesinə təsiri araşdırılır. Tədqiqatda istifadə edilən neft quyusuna analoji olan qurğunun sxematik təsviri şəkil 1-də göstərilmişdir.

Burada aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$m_{su}$  -qarışıqdakı suyun cari kütləsi,  $H$  – qarışığın hündürlüyü,  $A$  - amplituda  $\left[ A = \frac{a}{a_0} \right]$ ,  $h_{su}(t)$  -su sütununun cari hündürlüyü,  $\rho_{su}$  - suyun sıxlığı,  $R$  - arxa borunun radiusu,  $r$  - həyəcanlanma yaradan borunun radiusu,  $\bar{h}_{su}(t)$  - su sütununun cari hündürlüyü boyu vibrasiya,  $h_{su}^g(t)$  - yalnız cazibə dərcəsinə görə mövcud su hündürlüyü,  $h_{su}^{vit}(t)$  - yalnız vibrasiya qüvvəsinə görə mövcud su hündürlüyüdür.



**Şəkil 1.** Qravitasiya qüvvəsinin təsiri altında xarici təsirlər nəzərə alınmayaraq su-yağ qarışığının emulsiyalaşmasının başlanğıc (a) və sonlu (b) vəziyyəti.

Dərin quyuya nasosunun tarazlıq vəziyyətində olduğunu və su-neft demulsiasiyasının yalnız ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında baş verdiyini, yəni  $M_b$  miqdarının sabit olduğunu qəbul edək.

Su kütləsinin ayrılma intensivliyi  $m_{su}(t) = -\frac{dm_{su}(t)}{dt}$ , qarışıqın ayrılma intensivliyi  $[M_{su} - m_{su}(t)]$  ilə mütənasibdir.

Zərbədən qarışıqın ayrılması prosesinin diferensial tənliyini belə yazmaq olar [5]:

$$\frac{dm_{su}(t)}{dt} = k[M_{su} - m_{su}(t)], \quad (1)$$

Sərhəd şərtinin aşağıdakı kimi təyin edək:

$$m_{su}(t_0) = M_b, \quad (2)$$

Burada k- mütənasiblik əmsalı olub, məlum olduğu qəbul edilir və müsbətdir.

Dəyişənlərinə ayırısaq (1)-dən alırıq:

$$\frac{dm_{su}(t)}{M_{su} - m_{su}(t)} = k dt,$$

və ya

$$\frac{d[M_{su} - m_{su}(t)]}{M_{su} - m_{su}(t)} = k dt.$$

Buradan nəhayət, alırıq ki,

$$m_{su}(t) = M_{su} [1 - e^{-k(t-t_0)}]. \quad (3)$$

Şəkil 1-dən göründüyü kimi

$$M_{su} = \pi(R^2 - r^2)A\rho_{su}; \quad ;$$

$$H = A + H_0; \quad m_{su} = \pi(R^2 - r^2)\rho_{su} h_{su}(t). \quad (4)$$

(4) ifadəsini (3)-də nəzərə alsaq,

$$\pi(R^2 - r^2)\rho_{su} h_{su}(t) = \pi(R^2 - r^2)\rho_{su} A [1 - e^{-k(t-t_0)}]$$

alırıq.

Nəticə olaraq,

$$h_{su}(t) = A [1 - e^{-k(t-t_0)}] \quad (5)$$

alırıq.

Aydın ki, mütənasiblik amili-k qarışıqın müxtəlif faiz nisbəti üçün fərqli say qiymətlərinə malikdir və yalnız fiziki təcrübələrlə müəyyən edilə

bilər. k-nı müəyyən etmək üçün sabit temperaturda (5)-dən aşağıdakı münasibəti əldə edirik:

$$k = \ln \left[ 1 - \frac{h_{su}(t)}{A} \right]^{-\frac{1}{t-t_0}}.$$

Bənzər bir şəkildə, əldə etdiyimiz qarışıqın ayrılması prosesinə təsir edən zərbələri nəzərə alaraq, aşağıdakı ifadə üçün zərbə vəziyyətini araşdıraq:

$$h_{su}^{vib} = \pm A \left[ 1 - e^{-n(t-t_0)} \right],$$

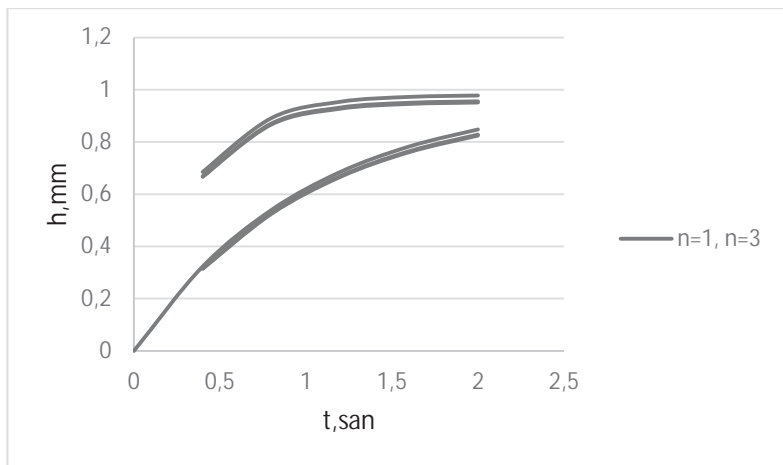
Burada n- qarışıqın ayrılması prosesinə zərbələrin (vibrasiyaların) təsirini nəzərə alan mütənasiblik əmsəlidir.

Amplitudanın su-neft qarışığı üçün yuxarıdakı düsturla hesablanmış qiyməti ilə vibrasiya halında suyun cari hündürlüyünün dəyişməsi hər bir zaman anında fərqli olacaqdır.

Su sütununun hündürlüyünün amplitudanın müxtəlif qiymətlərində zərbədən yaranan həyəcanlanmaların təsiri altında zamandan asılı olaraq dəyişməsinə müəyyən edən ifadə aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$\bar{h}_{su}(t) = A \left[ 1 - e^{-k(t-t_0)} \right] \pm A \left[ 1 - e^{-n(t-t_0)} \right]$$

Amplitudanın dəyişən qiymətlərində zərbələrin sayından asılı olaraq suyun cari hündürlüyünün dəyişməsi şəkil 2-də göstərilmişdir.

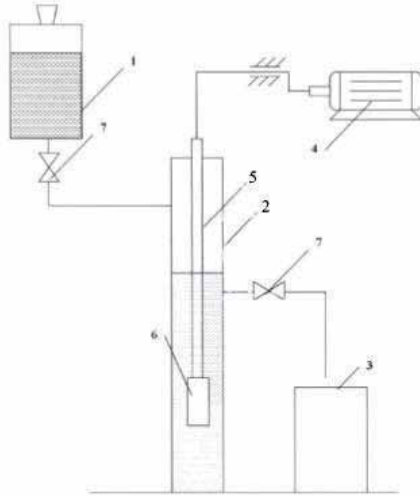


Şəkil 2. Su sütununun hündürlüyünün amplitudanın müxtəlif qiymətlərində zərbədən yaranan həyəcanlanmaların təsiri altında zamandan asılı olaraq dəyişməsi.

Burada n=1 və n=3 zərbələrin sayını göstərir. Alınan nəzəri nəticələr eksperimental olaraq tədqiq olunmuşdur.

Bu məqsədlə daxilində çubuqlar və impuls yaradan avadanlıqlar yerləşdirilmiş boru kəməri modeli neft-su emulsiya ilə doldurulmuşdur. Sistemdəki çubuqlar dövrü zərbələrdən sonra həyəcanlanmalar yaradır. Tədqiqatlarda fazaların ayrılması prosesindəki suyun səviyyəsi və təcrübə zamanı ayrılmanın baş verdiyi vaxt müəyyənləşdirilir. Burada istifadə olunan qurğu şəkil 3-də göstərilmişdir.

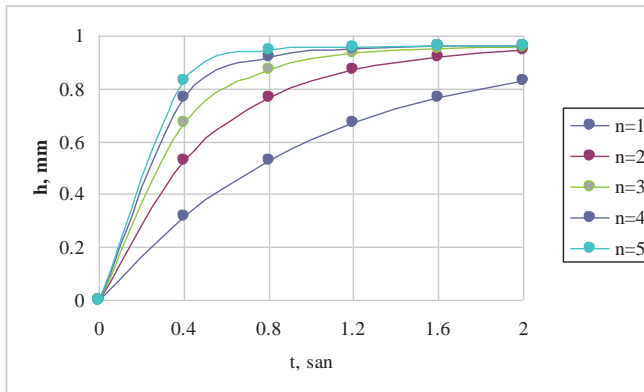




Şək. 3. Təcrübə qurğusunun sxemi.

Burada dərin quyu nasoslarının iş rejimini simulyasiya edən su-neft emulsiyasına xarici “zərbə” təsiri ilə bağlı təcrübələr aparılmışdır. Eksperimental qurğu aşağıdakı elementlərdən ibarətdir; 1-tədqiq olunan maye tutumu (su-neft emulsiyası); 2-əmzikli çubuqlarla boru kəməri modeli; 3-ölçmə qabiliyyəti; 4-dərin quyu nasoslarını hərəkətə gətirmək üçün mühərrik; 5-dərin quyu nasosları; 6-vibrasiya yaradan avadanlıq; 7-klapan.

Su sütununun hündürlüyünün müxtəlif tezliklərdə zərbədən yaranan həyəcanlanmaların təsiri altında zamandan asılı olaraq dəyişməsi əyriləri qurulmuşdur (şəkil 4).



Şək. 4. Su sütununun hündürlüyünün müxtəlif tezliklərdə zərbədən yaranan həyəcanlanmaların təsiri altında zamandan asılı olaraq dəyişməsi.

Qrafiklərdən görüldüyü kimi xarici həyəcanlanmaların təsirinin artması ilə sütunda emulsiya ayrılmasının çox olması müşahidə olunur.

**Nəticə.** Beləliklə, aparılan araşdırmaların nəticələri dərinlik nasoslarının istismarı prosesində yaranan zərbə həyəcanlanmalarının və boru kəmərlə-

rində su-neft emulsiyalarının ayrılma proseslərinin qarşılıqlı əlaqəsini göstərir. Zərbələrin tezlikləri nə qədər yüksək olarsa, bu cür ayrılmanın intensivliyi də bir o qədər yüksək olar. Bu halda zərbədən yaranan həyəcanlanmalar ayrılma səthində demulsasiya prosesini stimullaşdırır.

Tədqiqatın nəticələri quyudaxili mayenin demulsasiyası prosesini tənzimləmək üçün praktiki tövsiyələrin və metodların hazırlanmasında əsas ola bilər.

#### **ƏDƏBİYYAT**

1. Ioakim G. Oil and gas recovery. Nedra, 1966, 544 s.
2. Dregoteskou N.D. Subsurface oil recovery. Nedra, 1966, 418 s.
3. Kuznestov O.L., Simkin E.M., Chilingar I. Physical bases vibration and acoustic effects on oilgas formation. Mir, 2001, 262 s.
4. Sinaiskii E.G. Separation of two-phase multicomponent mixtures in oil and gas field equipment. Nedra, 1990, 272 s.
5. Panakhov G.M., Abbasov A.N., Kerimov E.V. Modelling process of water-oil-mixture demulsification in deep-well pumps. Transactions, 2005, 191 s.

#### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОТДЕЛЕНИЯ ЭМУЛЬСИЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО УДАРНОЙ НАГРУЗКОЙ**

**Н.Б.НАГИЕВА**

#### **РЕЗЮМЕ**

В настоящей работе были изучены теоретические и практические аспекты воздействия на процесс отделения эмульсии возмущения, вызванного ударом и без внешнего воздействия в водонефтяной смеси. Высокая эмиссия эмульсии наблюдается при увеличении влияния возмущения. Результаты исследования могут послужить основой для регулирования процесса деэмульгирования скважинных флюидов при разработке практических рекомендаций и методов.

**Ключевые слова:** гетерогенные системы, возмущения, эмульсия, амплитуда.

#### **INVESTIGATION OF THE PROCESSES OF SEPARATION OF EMULSIONS UNDER THE INFLUENCE OF PERTURBATION CAUSED BY SHOCK**

**N.B.NAGHIYEVA**

#### **SUMMARY**

In the present work, has been studied theoretical and practical aspects of the effects on the process of separation of the emulsion, the perturbation caused by shock and without external exposure in the water-oil mixture. A high emulsion emission has been observed as the influence of perturbation increases. The results of the study can serve as the basis for regulating the process of demulsification of well fluids in the development of practical recommendations and methods.

**Key words:** heterogeneous systems, perturbations, emulsion, amplitude.

*Redaksiyaya daxil oldu: 18.02.2020-ci il*

*Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il*

УДК 539.3

**О СОБСТВЕННОМ КОЛЕБАНИИ НЕОДНОРОДНОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ****Г. ГАСЫМОВ***Бакинский Государственный Университет*  
*husameddinqasimov@gmail.com*

*В работе рассматривается собственное колебание неоднородной цилиндрической оболочки, с учетом неоднородно вязко упругого сопротивления внешней среды.*

*Предполагается, что модуль упругости, плотность и характеристики основания являются непрерывными функциями координаты длины оболочки.*

*При решении применены метод разделения переменных, и метод Бубнова-Галеркина.*

**Ключевые слова:** колебание, оболочка, частота, упругий.

Известно, что цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения, изготовленные из различных материалов являются наиболее распространенными элементами конструкций, которые довольно широко используются в инженерной практике.

Последние годы среди вышеуказанных наиболее распространенными являются неоднородные и анизотропные материалы [1]. В случае, когда элементы конструкции лежат на упругом основании расчет на устойчивость и анализ собственных колебаний играет первостепенную роль.

Предположим, что замкнутая цилиндрическая оболочка кругового поперечного сечения находится под действием сжимающее усилие приложенное по торцам и лежит на неоднородно вязко упругом основании.

Предполагается, что модуль упругости  $E$  является со своими производными до четвертого порядка, непрерывной функцией координаты длины, а коэффициент Пуассона является постоянной величиной:

$$E = E_0(1 + \varepsilon f(x)), \nu = const, \varepsilon \in [0,1]$$

здесь  $E_0$  – соответствует к однородному случаю.

Рассмотрим осесимметричную форму собственной колебании. Тогда уравнение движения и уравнение совместности деформаций записываются в следующем виде [2]:

$$D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (1 + \mathcal{E}f(x)) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_1(x)W + k_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{E_0(1 + \mathcal{E}f(x))h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь  $D_0$  – цилиндрическая жесткость однородной оболочки,  $\Phi$  – функция напряжений,  $R$  – радиус,  $h$  – толщина оболочки,  $W(x, t)$  – прогиб,  $\rho(x)$  – плотность,  $k_1(x)$  и  $k_2(x)$  характеризуют соответственно упругие и вязкие свойства основания,  $t$  – время.

Системы (1) можно записать в следующем виде:

$$D_0 \left[ (1 + \mathcal{E}f(x)) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\mathcal{E} \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \mathcal{E} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_1(x)W + k_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2) \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{E_0(1 + \mathcal{E}f(x))h}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Исключая  $\Phi$ , из системы (2) получаем:

$$D_0 \left[ (1 + \mathcal{E}f(x)) \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + 4\mathcal{E} \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} + 6\mathcal{E} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + 4\mathcal{E} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \mathcal{E} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - \left[ \frac{E_0(1 + \mathcal{E}f(x))h}{R^2} - k_1(x) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ + 2 \frac{dk_1(x)}{dx} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 k_1(x)}{dx^2} W + \left[ \frac{d^2 k_2(x)}{dx^2} + \frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2 \left[ \frac{dk_2(x)}{dx} + \frac{d\rho(x)}{dx} \right] \times \\ \times \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} + [k_2(x) + \rho(x)] \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Для простоты анализа рассмотрим следующие случаи:

$$f(x) = \bar{x}; \quad k_1(x) = k_1^0(1 + \alpha \bar{x}); \quad k_2(x) = k_2^0(1 + \alpha \bar{x}); \quad \rho(x) = \rho_0(1 + \delta \bar{x}),$$

$$\bar{x} = xl^{-1}, \quad l - \text{длина оболочки, } \alpha, \delta \in [0, 1].$$

В этом случае уравнение (3) довольно упрощается и принимает следующий вид:

$$D_0(1 + \mathcal{E}\bar{x}) \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + 4 \frac{D_0 \mathcal{E}}{l} \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} - \left[ \frac{E_0(1 + \mathcal{E}\bar{x})h}{R^2} - k_1^0(1 + \alpha \bar{x}) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$

$$+ 2 \frac{k_1^0 \alpha}{l} \frac{\partial W}{\partial x} + 2 \left[ \frac{k_2^0 \alpha}{l} + \frac{\rho_0 \delta}{l} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} + \left[ k_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + \rho_0 (1 + \delta \bar{x}) \right] \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Для решения (4) поступаем следующим образом: В первом этапе будем использовать метод разделения переменных, в дальнейшем метод Бубнова-Галеркина. Решение будем искать в следующем виде:

$$W = \sin \omega t V(x), \quad (5)$$

здесь  $\omega$  – круговая частота колебания, функция  $V(x)$  должна удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Подставляя (5) в (4) получаем:

$$D_0 (1 + \varepsilon \bar{x}) \frac{d^6 V}{dx^6} + 4 \frac{D_0 \varepsilon}{l} \frac{d^5 V}{dx^5} - \left[ \frac{E_0 h (1 + \varepsilon \bar{x})}{R^2} - k_1^0 (1 + \alpha \bar{x}) \right] \frac{d^2 V}{dx^2} + \\ + 2 \frac{k_1^0 \alpha}{l} \frac{dV}{dx} - 2 \omega^2 \frac{k_2^0 \alpha + \rho_0 \delta}{l} \frac{dV}{dx} - \omega^2 \left[ k_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + \rho_0 (1 + \delta \bar{x}) \right] \frac{d^2 V}{dx^2} = 0. \quad (6)$$

Для однородных краевых условиях к уравнению (6) можно применить метод Бубнова-Галеркина, выбирая  $V(x)$  в следующем виде [3]:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n A_i V_i(x), \quad (7)$$

здесь  $A_i$  - неизвестные постоянные и каждая функция  $V_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) должна удовлетворять соответствующие краевые условия.

Учитывая (7) в (6) с помощью ортогонализации Бубнова-Галеркина можно написать:

$$\sum_{i=1}^n A_i \int_0^l \left[ L(V_i) - \omega^2 \frac{2(k_2^0 \alpha + \rho_0 \delta)}{l} \frac{dV_i}{dx} - \omega^2 \left[ k_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + \rho_0 (1 + \delta \bar{x}) \right] \frac{d^2 V_i}{dx^2} \right] V_k(x) dx = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

где

$$L(V_i) = D_0 (1 + \varepsilon \bar{x}) \frac{d^6 V_i}{dx^6} + 4 \frac{D_0 \varepsilon}{l} \frac{d^5 V_i}{dx^5} - \left[ \frac{E_0 h (1 + \varepsilon \bar{x})}{R^2} - k_1^0 (1 + \alpha \bar{x}) \right] \frac{d^2 V_i}{dx^2} + 2 \frac{k_1^0 \alpha}{l} \frac{dV_i}{dx}.$$

Как известно, в общем случае  $\omega^2$  определяется из условия равенства нулю основного определителя системы алгебраических уравнений составленных из коэффициентов  $A_i$ . Как правильно отмечается в [4], для определения инженерной расчетной формулы, достаточно определить значение  $\omega^2$ , который соответствует к первому приближению, т.е.

$$\int_0^l \left[ L(V_1) - \omega^2 \frac{2(k_2^0 \alpha + \rho_0 \delta)}{l} \frac{dV_1}{dx} - \omega^2 \left[ k_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + \rho_0 (1 + \delta \bar{x}) \right] \frac{d^2 V_1}{dx^2} \right] V_1(x) dx = 0. \quad (8)$$

Для определения  $\omega^2$  примем простую форму (шарнирное закрепление) аппроксимации:

$$V_1 = \sin m \pi \bar{x}, \quad (9)$$

здесь  $m$  – число полуволн по образующей.

Подставляя (9) в (8) получаем:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 L(\sin m\pi\bar{x}) \sin m\pi\bar{x} d\bar{x}}{\int_0^1 \left[ \frac{2(k_2^0\alpha + \rho_0\delta)}{l} \frac{m\pi}{l} \cos m\pi\bar{x} - (k_2^0(1 + \alpha\bar{x}) + \rho_0(1 + \delta\bar{x})) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin m\pi\bar{x} \right] \sin m\pi\bar{x} d\bar{x}}, \quad (10)$$

здесь

$$L(\sin m\pi\bar{x}) = -D_0(1 + \varepsilon\bar{x}) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^6 \sin m\pi\bar{x} + 4 \frac{D_0\varepsilon}{l} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^5 \cos m\pi\bar{x} + \left[ \frac{E_0h(1 + \varepsilon\bar{x})}{R^2} - k_1^0(1 + \alpha\bar{x}) \right] \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin m\pi\bar{x} + 2 \frac{k_1^0\alpha}{l} \cos m\pi\bar{x}. \quad (11)$$

С учетом (11), формула (10) имеет следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{\left( \frac{D_0\lambda^4}{l^4} - \frac{E_0h}{R^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right) + k_1^0 \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha \right)}{k_2^0 \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha \right) + \rho_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\delta \right)}, \quad (12)$$

где  $\lambda = m\pi$ .

Отметим, что в случае, когда модуль упругости и плотность являются функцией только координаты толщины, решения вышеуказанных задач не вызывает особого труда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976, 376 с.
2. Безухов Н.И., Лужин С.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений. М., 1969, 423 с.
3. Тимошенко С.П. Колебание в инженерном деле. М.-Л., 1966, 344 с.
4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., 1991, 334 с.

#### DAİRƏVİ EN KƏSİYİNƏ MALİK OLAN SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN MƏXSUSİ RƏQSİ HAQQINDA

H.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə ətraf mühitin qeyri-bircins özlü-elastik müqavimətini nəzərə almaqla, qeyri-bircins silindrik örtüyün məxsusi rəqsı məsələsinə baxılır.

Fərz olunur ki, elastiklik modulu, sıxlıq və əsasın xarakteristikaları örtüyün uzunluq koordinatının kəsilməz funksiyalarıdır.

Məsələnin həllində dəyişənlərinə ayırma üsulu və Bubnov-Qalyorkin üsulu tətbiq olunur.

**Açar sözlər:** rəqs, örtük, tezlik, elastik.

# ON THE EIGEN OSCILLATION OF ANNULAR CROSS SECTION INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELL

H.GASIMOV

## SUMMARY

In the paper studies the eigen oscillation of an inhomogeneous cylindrical shell, lying on a nonhomogeneous under axial compression.

It is assumed, that the elasticity module, density and characteristics of the foundation are continuous functions of length coordinate.

The solution of the problem is constructed by the method of separation of variables and Bubnov-Galerkin method.

**Key words:** oscillation, shell, frequency, elastic.

*Поступила редакцию: 04.03.2020 г.*

*Подписано к печати: 22.10.2020 г.*

## FİZİKA

## NANOSİLİNDRDƏ ELEKTRON QAZININ ƏSAS HALI

T.H.İSMAYİLOV, A.F.ASLANLI

*Bakı Dövlət Universiteti**tariyel.i@gmail.com, ms.fq@bk.ru,*

*Yarımkeçirici əsaslı nanosilindrə (kvant silindri) elektron qazı məsələsinə baxılmışdır. Bircərrəcikli effektiv kütlə yaxınlaşmasında enerji spektri və dalğa funksiyaları tapılmışdır. Enerji spektrinin elektronun kütləsindən, nanosilindrin radiusundan və hündürlüyündən asılı analitik ifadəsi verilmişdir. Effektiv kütlənin həcmi sabitliyi şərtində əsas halın enerjisi ilə  $RQ/H$  nisbəti arasındakı əlaqə müəyyən edilmişdir.*

**Açar sözlər:** de Broyl dalğasının uzunluğu, nanosilindr (kvant silindri), ölçüyə görə kvantlanma səviyyələri, əsas halın enerjisi.

Nanotexnologiyada kvant məfilləri, kvant nöqtələri və kvant üzükleri kimi mikro- və nanoölçülü quruluşların (strukturların) alınması keyfiyyətə yeni fundamental fiziki hadisələrin kəşfinə və tədqiqinə rəvac verir. Belə əşyölçülü elektron sistemləri özlərini süni atomlar kimi aparırlar. Real atomlardan fərqli olaraq, süni atomların həndəsi ölçülərini və konfigurasiyalarını, yəni topologiyalarını, dəyişməklə süni atomların bütün kimyəvi və fiziki xassələrini idarə etmək mümkündür [1-4]. Topologiyanın dəyişməsi nəticəsində sistemin enerji strukturu, eləcə də dalğa funksiyaları dəyişmiş olur. Yəni məqsədyönlü olaraq topologiyayı seçməklə lazımı parametrlərə malik cihaz və qurğu hazırlamaq olar. Hazırda silindrik simmetriyalı elektron sistemləri geniş tədqiq olunmaqdadır. Silindrik simmetriyalı kvant sistemlərinin elektron xassələrinə olan maraq, karbon nanoborularının gələcək nanoelektronikanın cihaz və qurğuları üçün aktiv elementlər olaraq öyrənilməsi və bunlardan istifadə edilməsi barədə ilk təkliflərdən [5, 6] başlayaraq artmaqdadır. Özünəməxsus mexaniki, elektrik, termodinamik, kinetik, optik, maqnit xüsusiyyətlərinə malik olan bu sistemlərdə yeni-yeni özəlliklər aşkarlanır [3, 4]. Son illərdə əyri bir səthdə və əyri səthlərlə əhatə olunmuş həcm daxilində olan yükdaşıyıcılarla bağlı effektlər intensiv sürətdə tədqiq olunmaqdadır [6-11].

Təqdim olunan işdə yarımkeçirici əsaslı nanosilindrə (kvant silindri) elektron qazı məsələsinə baxılmışdır. Nanosilindr (və ya kvant silindri) dedikdə nəzərdə tutulur ki, onun hündürlüyü ( $H$ ) və en kəsiyinin radiusu ( $R$ ) de-Broyl dalğasının uzunluğu ( $\lambda$ ) tərtibindədir, yəni  $H, R \sim \lambda$ . Bu halda silin-



dirdəki elektronun enerji spektri atomdakı kimi tam kvantlanmış olur. Başqa sözlə, enerji spektri ölçüyə görə tam kvantlanmış səviyyələrdən ibarət olur. Şredinger tənliyinin həllindən birzərrəcikli effektiv kütlə yaxınlaşmasında, sonsuz dərin quyu modelində yükdaşıyıcının (elektronun) enerji spektri və dalğa funksiyaları tapılmışdır. Göstərilmişdir ki, enerji spektri nanosilindrin en kəsinin radiusundan, hündürlüyündən və yarımkeçiridəki elektronun effektiv kütləsindən asılıdır.

### Enerji spektri

Kristal qəfəsin  $U(\vec{r})$  periodik sahəsində yerləşən elektron üçün effektiv kütlə yaxınlaşmasında Şredinger tənliyini yazaq:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 + U(\vec{r}). \quad (1)$$

Burada  $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\Psi(\vec{r})$  periodu qəfəs sabitinə bərabər

olan periodik funksiya,  $E$  elektronun enerjisi,  $U(\vec{r})$  məhdudlaşdırıcı potensialdır (quyu potensialı).

Sonsuz dərin quyu modelində məhdudlaşdırıcı potensialı

$$U(r, z) = \begin{cases} 0, & r \leq R_0, \quad 0 \leq z \leq H \\ \infty, & \text{qalan hallarda} \end{cases} \quad (2)$$

kimi seçsək, silindrik kordinatlarda (1) tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = E\psi, \quad (3)$$

harada  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Dalğa funksiyasını

$$\psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (4)$$

kimi seçib, (3) tənliyində yerinə yazsaq, bu tənlik dəyişənlərinə ayrılacaq və  $R(\rho)$ ,  $\Phi(\varphi)$ ,  $Z(z)$  üçün bir-birindən qeyri-asılı üç tənlik alınacaq. Bunların həllindən alınan dalğa funksiyaları üzərinə əlavə edilən

$$R(r=R) = 0, \quad \Phi(\varphi = 2\pi R), \quad Z(z=H) = 0 \quad (5)$$

sərhəd şərtlərindən enerji spektri üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{(\mu_m^{(\nu)})^2}{R_0^2} + \frac{\pi^2 n^2}{H^2} \right], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Burada  $\mu_m^{(\nu)}$  işarələməsi  $J_m$  Bessel funksiyasının  $\nu$ -cü köküdür.

### Əsas halın enerjisi.

Əsas halın enerjisi (7) düsturunda Bessel funksiyanın birinci kökünün, yəni 2,405 və  $n=1$  qiymətlərinə uyğundur:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{(2,048)^2}{R_0^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right]. \quad (7)$$

Görünür ki, nanosilindrdəki elektronun enerjisi silindrin radiusundan, hündürlüyündən və elektronun effektiv kütləsindən asılıdır. Müxtəlif yarımkeçiricilər əsasında alınan kvant silindrlərində elektronun effektiv kütləsi çox müxtəlifdir [1, 9].

İndi silindrin həcmnin və effektiv kütlənin sabitliyi şərtində əsas halın enerjisi ilə  $R_0/H$  nisbəti arasındakı əlaqəni tapan. Yəni qəbul etdiyimiz şərt daxilində enerjinin minimumu (əsas halın enerjisi)  $R_0/H$  nisbətinin hansı qiymətinə uyğundur? Bu məqsədlə Laqranjın qeyri-müəyyən vuruqlar metodundan istifadə edərək, müəyyən hesablamalardan sonra alarıq ki,

$$\frac{R_0}{H} = \frac{2,048}{\pi\sqrt{2}} \approx 0,54 \quad (8)$$

Əsas halın enerjisi effektiv kütlənin qiymətindən asılı olsa da, bu kütlənin verilmiş qiymətində  $R_0/H$  nisbəti sabitdir. Amma aydındır ki, bu sabitin qiyməti müxtəlif effektiv kütlələr üçün müxtəlif olacaq.

### ƏDƏBİYYAT

1. Thomas Ihn, Semiconductor Nanostructures Oxford University Press, 2011.
2. Datta S. Quantum Transport: Atom to Transistor (Cambridge University Press, 2005).
3. Nazarov Y.V. and Blanter Y. Quantum Transport: Introduction to Nanoscience. Cambridge Univ Pr, 581 (2009).
4. Ashoori R.C. Electrons in artificial atoms. Nature 379, 413–419 (1996).
5. Radushkevich L.V. and Lukyanovich V.M., Zh. Fiz. Khim. **26**, 88, 1952.
6. Oberlin A., Endo M., and Koyama T, J. Cryst. Growth **32**, 335, 1976.
7. Haug H. and Jauho A.-P. Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors (Springer Berlin Heidelberg New York, 2008).
8. Mitin V.V., Kochelap V.A., Mitra Dutta, Stroscio M.A. Introduction to Optical and Optoelectronic Properties of Nanostructures Cambridge University Press, 2019; 403 pages
9. Harrison P., Valavanis A. Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures. 2016, Edition 4, Wiley, 624p.
10. Iadonisi G., Cantele G., Chiofalo M.L. Introduction to Solid State Physics and Crystalline Nanostructures, Springer-Verlag Mailand. 2014, 707p.
11. Yu-Guo Guo. Nanostructures and Nanomaterials for Batteries: Principles and Applications, Springer Singapore, 2019, 393p.

# ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В НАНОЦИЛИНДРЕ

Т.Г.ИСМАИЛОВ, А.Ф.АСЛАНЛИ

## РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача об электронном газе в наноцилиндре (квантовом цилиндре) на основе полупроводников. Найдены энергетический спектр и волновые функции в приближении эффективной массы. При условии постоянства эффективной массы и объема цилиндра определена связь между энергией основного состояния и отношением радиуса цилиндра к его высоте.

**Ключевые слова:** длина волны де Бройля, наноцилиндр (квантовый цилиндр), размерно-квантованные уровни, энергия основного состояния.

## GROUND STATE OF ELECTRONIC GAS IN NANOCYLINDER

T.H.İSMAYILOV, A.F.ASLANLI

## SUMMARY

The problem of electron gas in a semiconductor-based nanocylinder (quantum cylinder) is considered. Energy spectrum and wave functions are found in the approximation of the effective mass. The relationship between the energy of the ground state and the ratio of the cylinder's radius to its height is determined.

**Keywords:** de Broglie wavelength, nanocylinder (quantum cylinder), quantum size levels, ground state energy.

*Redaksiyaya daxil oldu: 03.03.2020-ci il*

*Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il*

## METAL OKSİD TƏRKİBLİ BƏZİ NANOHISSƏCİKLƏRİN MEXANİKİ XASSƏLƏRİNİN KVANT MEXANİKİ TƏDQIQI

A.Q.HƏSƏNOV

*Azərbayca Respublikası, Silahlı Qüvvələrin Hərbi Akademiyası*  
*gasqhapk@gmail.com*

*Metal oksid nanohissəciklərinin mexaniki xassələri onların vizual modelləri əsasında qeyri-empirik və Genişlənmiş Hükkel metodları tətbiq etməklə öyrənilmişdir. Hesablamaların nəticələri göstərir ki, ölçüləri ~1 nm tərtibində olan metal oksidi nanohissəciklərin mexaniki xassələri, təqribən həcmi metal oksid materialların mexaniki xassələri kimidir.*

**Açar sözlər:** Nanohissəcik, riyazi model, kvantmexaniki metod.

Alüminium oksid, titan oksid, dəmir oksid, silisium dioksid və sirkonium dioksid tərkibli nanohissəciklərin mexaniki xassələrinin kvant mexanikası metodları ilə öyrənilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. İşdə alüminium, titan, dəmir, silisium və sirkonium oksid nanohissəciklərinin mexaniki parametrlərinin - sərtlik əmsalının, Yunq, sürüşmə, həcmi və möhkəmlik modullarının qeyri-empirik və Genişlənmiş Hükkel metodları tətbiq etməklə hesablanmasına baxılmışdır. MO LCAO yaxınlaşmasına əsasən nanohissəciyin  $U_i$  molekulyar orbitalları bu nanohissəcikdəki atomların seçilən atom orbitallarının xətti kombinasiyası şəklində axtarılmışdır:

$$U_i = \sum_{q=1}^n c_{qi} \cdot \chi_q \quad (1)$$

Burada  $\chi_q$ - atom orbitallarıdır və məlum hesab olunur.  $m$  - bazis funksiyaları kimi seçilən atom orbitallarının sayıdır,  $c_{qi}$ - naməlum əmsallarının qiymətləri molekulyar orbitallar metodunun

$$\sum_q (H_{pq} - \varepsilon_i S_{pq}) c_{qi} = 0 \quad (2)$$

tənlikləri həll olunaraq tapılır.  $H_{pq}$  effektiv Hamilton operatorunun matris elementləri,  $S_{pq}$  örtmə inteqrallarıdır. Hesablamalar eksponensial xarakterli Qauss funksiyaları bazisində aparılmışdır [1, 2].

$$\begin{aligned} \chi_q &\equiv \chi_{nlm}(\mu, r\theta\varphi) \\ &= \left[ \frac{2^{2n}(n-1)!}{(2n-1)!} \sqrt{\frac{(2\mu)^{2n+1}}{\pi}} \right]^{1/2} \cdot r^{n-1} \cdot e^{-\mu r^2} \\ &\cdot Y_{lm}(\theta\varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &Y_{lm}(\theta\varphi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_{l|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

$P_{l|m|}(\cos\theta)$  – birləşmiş normallanmış Lejandr funksiyasıdır [3].  $\mu$  – variasiya parametridir və enerjinin minimumluq şərtindən tapılır.  $r\theta\varphi$  – elektronların sferik koordinatlarıdır. (2) tənliləri həll olunaraq qeyd olunan nanohissəciklərin  $\varepsilon_i$  orbital enerjilərin qiymətləri tapılmış [12-15] və onların əsasında nanohissəciklərin bir sıra xassələri tədqiq olunmuşdur.

Nanohissəciyin elektronları ən aşağı enerji səviyyəsindən başlayaraq iki-iki səviyyələrdə yerləşdirilir və elektronlar tərəfindən tutulmuş ən yuxarı  $\varepsilon_{HOMO}$  və ən aşağı boş  $\varepsilon_{LUMO}$  molekulyar orbitallara uyğun enerjilər müəyyən olunur. Nanohissəciyin ionlaşma potensialı [1]  $I_p = -\varepsilon_{HOMO}$ , qadağan olunmuş zonanın eni  $E_g = \varepsilon_{LUMO} - \varepsilon_{HOMO}$ , tam elektron enerjisi  $E_{nh} = \sum_i \varepsilon_i$ ,  $i$  – yə görə cəm elektronlar olan molekulyar orbitallar üzrə aparılır və nanohissəciyin stabilliyi  $\Delta E = E_{nh} - \sum_A E_A$  kimi hesablanı bilər.  $E_A$  bu nanohissəciyə daxil olan atomun sərbəst halda tam elektron enerjiləridir.  $\Delta E > 0$  olduqda material qeyri-stabil,  $\Delta E < 0$  olduqda material stabil hesab olunur.

Nanohissəciyin mexaniki xassələrinin öyrənilməsində Yunq və möhkəmlik modullarının qiymətlərinin hesablanması vacib məsələdir. Yunq modulunun qiymətini

$$Y = \frac{F}{S} \quad (5)$$

düsturu vasitəsilə hesablamaq olar. Burada  $Y$  - Yunq modulu,  $F$  – nanohissəciyi parçalamaq üçün qüvvənin qiyməti olub  $F \approx \frac{E_b}{r}$  düsturu ilə hesablanır,  $S = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$  nanohissəciyin en kəsiyinin sahəsidir,  $E_b$  – nanohissəciyi rabitə enerjisinin qiyməti olub  $E_b = |\Delta E|$  düsturu ilə ifadə olunur,  $r$  - atomlar arası rabitənin uzunluğudur və atomların dekart koordinatları əsasında tapılır.

Nanohissəciyin k sərtlik əmsalının [11],  $G$  sürüşmə,  $K$  həcmi elastiki və  $HN$  möhkəmlik modullarının qiymətlərinin hesablanması üçün isə [2, 6-10] - də verilən

$$k = \frac{Y \cdot S}{D}, \quad G = \frac{Y}{2 \cdot (1 + \nu)}, \quad K = \frac{Y}{3 \cdot (1 - 2\nu)}, \quad HN = G \cdot A \cdot e^{-B \cdot T} \quad (6)$$

düsturlərindən istifadə etmək olar. Burada  $\nu$  Puasson əmsalı [6], nanohissəciklər üçün müəyyən təcrübi faktlar əsasında təyin olunur. Metal oksid nanohissəciklər üçün  $A$  kəmiyyətinin qiyməti  $A = 0.0807$  və  $B$  eksponensial parametrlərinin qiyməti isə  $B = 2.204 \cdot 10^{-3} 1/K$ ,  $T = 300^0 K$ .

### Kvantmexaniki kompüter hesablamaları

Qurulmuş vizual modellər (şəkil 1-5) əsasında  $(Al_2O)_6$ ,  $(TiO_2)_6$ ,  $(Fe_3O_4)_4$ ,  $(SiO_2)_6$  və  $(ZrO_2)_6$  üçün energetik parametrlərinin qiymətləri kompüterdə hesablanmışdır [12-15]. Nəticələr cədvəl 1-də verilmişdir.

Cədvəl 1

### $(Al_2O)_6$ , $(TiO_2)_6$ , $(Fe_3O_4)_4$ , $(SiO_2)_6$ və $(ZrO_2)_6$ üçün energetik parametrlərinin kompüterdə hesablanmış qiymətləri

N	Nano-hissəcik	Kvantmexaniki metod	$\mathcal{E}_{HOMO}$	$\mathcal{E}_{LUMO}$	$E$ (a.v.)	$\Delta E$ (a.v.)	$I_p$ (eV)	$E_g$ (eV)
1	$(Al_2O)_6$	Genişlənmiş Hükkel	-7.790344	-7.572039	-44.677468	-0.645	7.79	0.218
2	$(TiO_2)_6$	Qeyri-empirik	-2.199590	1.027713	-5926.0243825	-4.777	2.20	3.227(3.3)
3	$(Fe_3O_4)_4$	Genişlənmiş Hükkel	-11.07594	-10.802278	-404.9349487	-0.514	11.08	0.274
4	$(SiO_2)_6$	Qeyri-empirik	-7.440391	5.449863	-2600.645508	-4.113	7.44	12.890
5	$(ZrO_2)_6$	Qeyri-empirik	-6.538526	3.105533	-32876.58817	-7.393	6.54	9.644

Cədvəl 1-dəki qiymətlərə əsasən  $(Al_2O)_6$ ,  $(TiO_2)_6$ ,  $(Fe_3O_4)_4$ ,  $(SiO_2)_6$  və  $(ZrO_2)_6$  nanohissəciklərinin mexaniki parametrlərinin -  $k$  sərtlilik əmsalının [11],  $Y$  Yunq,  $G$  sürüşmə,  $K$  həcmi elastiki və  $HN$  möhkəmlik modullarının [2, 5 - 7] qiymətlərini hesablamaq olar. Bunun üçün hər bir nanohissəcik üçün cədvəl 2-də verilmiş rabitə enerjisinin  $E_b = |\Delta E|$ , atomlar arası rabitə uzunluğunun  $r$ , ölçüsünü  $D$ , en kəsiyinin sahəsini  $S$ , parçalama qüvvəsini  $F$  və Puasson əmsalının  $\nu$  qiymətlərini (5) - (6) düsturlarında nəzərə alıb hesablamaq olar. Nəticələr cədvəl 3-də verilmişdir. Mötərizə daxilində verilmiş qiymətlər həmin kəmiyyətlərin digər üsullar hesablanmış qiymətləridir. Brijesh K.Pandey və Ratan L.Jaiswal tərəfindən verilmiş metodika[8] ilə ixtiyari ölçülü (D) nanohissəcik üçün mexaniki parametrlərinin qiymətlərini hesablamaq mümkündür deyildir.

**$(Al_2O)_6$ ,  $(TiO_2)_6$ ,  $(Fe_3O_4)_4$ ,  $(SiO_2)_6$  və  $(ZrO_2)_6$   
üçün bəzi kəmiyyətlərin kompüterdə hesablanmış qiymətləri**

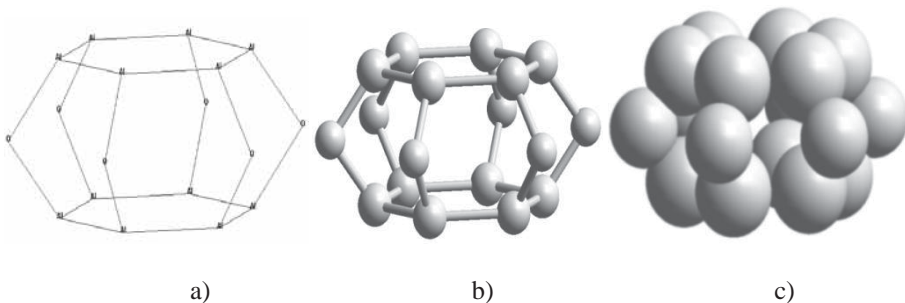
N-si	Nano-hissəcik	$E_b$ (J)	$r$ (m)	$D$ (m)	$S$ ( $m^2$ )	$F$ (N)	$\nu$
1	$(Al_2O)_6$	$2.807 \cdot 10^{-18}$	$0.214 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-9}$	$9.677 \cdot 10^{-19}$	$1.315 \cdot 10^{-8}$	0.27
2	$(TiO_2)_6$	$1.984 \cdot 10^{-17}$	$0.174 \cdot 10^{-9}$	$0.92 \cdot 10^{-9}$	$6.648 \cdot 10^{-17}$	$1.195 \cdot 10^{-7}$	0.35
3	$(Fe_3O_4)_4$	$1.984 \cdot 10^{-17}$	$0.190 \cdot 10^{-9}$	$1.44 \cdot 10^{-9}$	$5.807 \cdot 10^{-19}$	$1.182 \cdot 10^{-8}$	0.336
4	$(SiO_2)_6$	$1.791 \cdot 10^{-17}$	$0.186 \cdot 10^{-9}$	$0.854 \cdot 10^{-9}$	$5.728 \cdot 10^{-19}$	$9.629 \cdot 10^{-8}$	0.26
5	$(ZrO_2)_6$	$3.219 \cdot 10^{-17}$	$0.219 \cdot 10^{-9}$	$1.100 \cdot 10^{-9}$	$9.503 \cdot 10^{-19}$	$2.499 \cdot 10^{-7}$	0.19

**$(Al_2O)_6$ ,  $(TiO_2)_6$ ,  $(Fe_3O_4)_4$ ,  $(SiO_2)_6$  və  $(ZrO_2)_9$   
üçün mexaniki parametrlərinin hesablanmış qiymətləri**

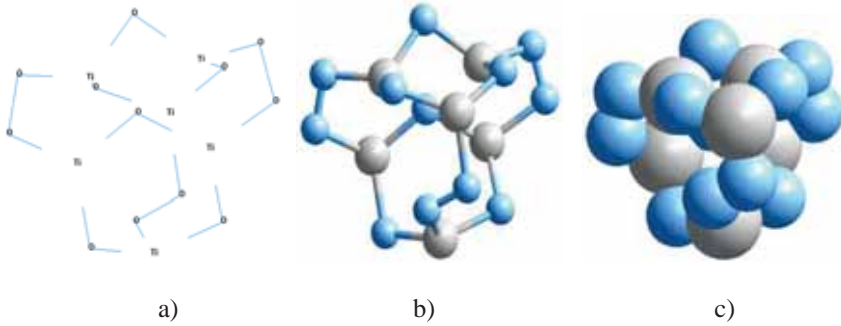
No sıra nömrəsi	Nano-hissəcik	Sərtlik əmsalı $k$ N/m	Sürüşmə modulu $G$ (GPa)	Həcmi elastiki modul $K$ (GPa)	Yunq modulu $Y$ (GPa)	Möhkəmlik modulu $HN$ (GPa)
1	$(Al_2O)_6$	11.85	5.35	9.849	13.59	0.223
2	$(TiO_2)_6$	129.93	66.60	199.8	179.8	2.774
3	$(Fe_3O_4)_4$	13.54	7.42	20.14	19.82	0.310
4	$(SiO_2)_6$	112.75	66.7	116.7	168.1	2.779
5	$(ZrO_2)_9$	133.819	65.09	83.22	154.9 (171-186)	2.712

### NƏTİCƏ

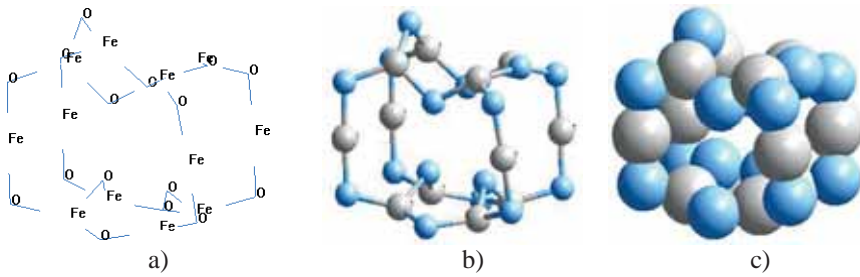
Alüminium oksid, titan oksid, dəmir oksid, silisium dioksid və sirkonium dioksid nanohissəciklərinin mexaniki xassələri qeyri-empirik və genişlənmiş Hükkel metodları istifadə etməklə öyrənilmişdir. Hesablamaların nəticələri göstərir ki, ölçülüləri  $\sim 1 \text{ nm}$  tərtibində olan metal oksid nanohissəciklərin mexaniki xassələri, təqribən həcmi metal oksid materialların mexaniki xassələri kimidir.



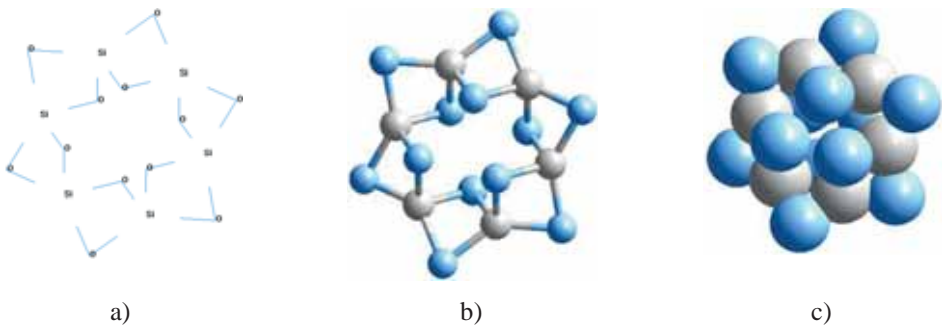
**Şək. 1.**  $(Al_2O)_6$  nanohissəciyinin vizual modelləri  
(a - xətlə, xətt və kürələrlə, c- kürələrlə göstərilib)



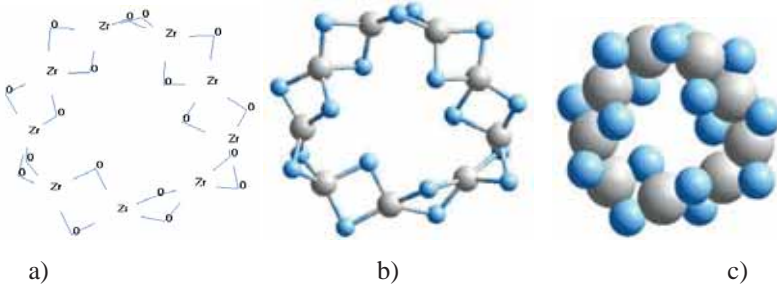
**Şəkl. 2.**  $(TiO_2)_6$  nanohissəciyinin vizual modelləri (a - xətlə, xətt və kürələrlə, c- kürələrlə göstərilib)



**Şəkl. 3.**  $(Fe_3O_4)_4$  nanohissəciyinin vizual modelləri (a - xətlə, xətt və kürələrlə, c- kürələrlə göstərilib)



**Şəkl. 4.**  $(SiO_2)_6$  nanohissəciyinin vizual modelləri (a - xətlə, xətt və kürələrlə, c- kürələrlə göstərilib)



**Şəkl. 5.**  $(ZrO_2)_9$  nanohissəciyinin vizual modelləri (a - xətlə, xətt və kürələrlə, c- kürələrlə göstərilib)



## ƏDƏBİYYAT

1. Минкин В.И., Симкин Б.Я., Миняев Р.М. Теория строения молекул. Ростов - на Дону: Феникс, 2010, 560 с.
2. Gasanov A. G. and Bairamov A. A. Simulation of the Electronic Structure of Graphene – Polyvinylidene Fluoride Composite Material // Physics of the Solid State, 2019, Vol. 61, No. 1, pp. 208–213, impact factor 0.95
3. Paşayev F.H., Həsənov A.Q. Atom və molekul fizikasında riyazi metodlar. Dərs vəsəti, Bakı: Müəllim, 2013, 124 s.
4. Grandshteyn I.S. and Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. New York: Academic Press, 2000, 720 p.
5. Openov L. A. and Podlivaev A. I. Physics of the Solid State, 59, 1267 (2017).
6. J.-W. Jiang, H.S. Park. Nano Lett. 16, 2657 (2016).
7. Dan Guo, Guoxin Xie and Jianbin Luo. Mechanical properties of nanoparticles: basics and applications. J. Phys. D: Appl. Phys. 47 (2014) 013001 (25pp).
8. Brijesh K. Pandey, Ratan L. Jaiswal. Prediction of elastic moduli of metallic nanoparticles. International Journal of Materials Science, Volume 12, Number 1(2017)
9. Черняева Т.П., Грицина В.М., Михайлов Е.А., Остапо А.В. Корреляция между упругостью и другими свойствами циркония. Вопросы атомной науки и техники. 2009. №4-2.Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (94), с. 206-217.
10. Wolfsberg M, Helmholz L. J. Chem. Phys., 1952; 20: 837.
11. Упругие и прочностные характеристики материалов - Доктор Лом. 07.06.2018, <http://doctorlom.com/item318.html>
12. Həsənov A.Q. Sirkonim dioksid nanohissəciyi və onun nanokompozisiyalarının modelləşdirilməsi və tədqiqi // Kimya problemləri, 2013, N 3, s.317-324
13. Ramazanov M.Ə., Paşayev F.H., Həsənov A.Q. və b. Titan dioksid nanohissəciyinin modelləşdirilməsi və tədqiqi // BDU-nun xəbərləri, fiz.-riy., elmləri seriyası, 2014, №3, s.86-92
14. Gasanov A.G., Bayramov A.A., Hashimov E.G. Mathematical modeling of the electron structure of SiO<sub>2</sub> nanoparticle // AJP FİZİKA 2017, volume XXIII, Number 1, Section: En, s.34-39
15. Paşayev F.H., Həsənov A.Q., Vahabova M.R. və b. (Al<sub>2</sub>O)<sub>6</sub> nanohissəciklərinin riyazi modelləşdirilməsi və energetik parametrlərinin təyini // AzTU, Elmi əsərləri, texniki elmlər, 2017, № 4, s.133-137

## ИЗУЧЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛ СУЛФИД СОДЕРЖАЩИЙ НАНОЧАСТИЦ С КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А.Г.ГАСАНОВ

### РЕЗЮМЕ

Механические свойства наночастиц алюминия оксид, титан оксид, феррум оксид, силициум диоксид и сирконий диоксида были изучены с использованием, неэмпирический и расширенного метода Хьюккеля. Расчеты проводились на основе визуальных моделях этих наночастиц. Результаты показывают, что механические свойства мелких (~ 1 нм) металл оксид наночастиц почти совпадают с механическими свойствами металл оксид материалов.

**Ключевые слова:** наночастицы, математическая модель, квантовомеханический метод

# STUDING MECHANICAL PROPERTIES SOME METAL OKSIDE CONTAINING NANOPARTICLES BY QUANTUM METHODS

A.G.GASANOV

## SUMMARY

Mechanical properties of aliminum okside, titanium diokside, ferrium okside, silisium diokside and sirconium diokside have been studied using the non empirical and the Extended Hukkel methods. The calculations was carried out on the base visual models of these nanoparticles. The results show that the mechanical properties of smal (~ 1 nm) metal okside nanoparticles are the same as the mechanical properties of bulk metal okside materials.

**Key words:** Nanoparticles, mathematical model, quantum mechanical method.

*Redaksiyaya daxil oldu: 25.02.2020-ci il*

*Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il*

UOT 538.3

**PİON NUKLON QARŞILIQLI TƏSİR SABİTİNİN  
AdS/KXD-nin SƏRT DİVAR MODELİNDƏ HESABLANMASI**

**Ş.İ.TAĞIYEVA**

*shahnaz.ilqarzadeh.92@mail.ru*

*Son dövrlərdə elementar zərrəciklərin qarşılıqlı təsirinin Anti-de Sitter və Konformal Sahə Nəzəriyyəsinin (AdS/KSN) uyğunluq prinsipi əsasında öyrənilməsi nəzəri fizikada geniş imkanlar açmışdır [5]. AdS/KSN uyğunluq prinsipinə əsaslanan AdS/KXD-nin sərt və yumşaq divar modelləri çərçivəsində elementar zərrəciklərin qarşılıqlı təsir sabitlərinin formfaktorların hesablanması hadronların daxili quruluşunu öyrənməyə, effektiv kəsiyin hesablanmasına imkan yaradır[8]. Bu işdə AdS/KXD-nin sərt divar modeli daxilində,  $\pi$  mezon- nuklon qarşılıqlı təsir sabiti hesablanmışdır.*

**Açar sözlər:** Anti-de Sitter fəzası, mezon, nuklon, profil funksiyası.

**Sərt divar modeli**

Sərt divar modelində qarşılıqlı təsir üçün təsirin ifadəsi aşağıdakı kimidir [1]:

$$S_{q/t}(V(q, z)) = \int d^4x dz \sqrt{g} \mathcal{L}_{q/t} \quad (1)$$

$g=|\det g_{MN}|$  ( $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$ ) 5-ölçülü Anti-de Sitter fəzasının determinantıdır. Sərt divar modelində  $z$  dəyişəninə 0 və  $z_m$  nöqtələrində sərhəd şərti qoyulduğundan  $z$  dəyişəni  $0 \leq z \leq z_m$  intervalında dəyişir [10].

$\mathcal{L}_{q/t}$ -isə AdS fəzasının daxilindəki vektor sahə ilə fermion sahələri arasındakı qarşılıqlı təsir laqranjianıdır.

AdS/KSN uyğunluğuna əsasən 4-ölçülü KSN-dəki törədici funksional 5-ölçülü AdS<sub>5</sub> fəzasında (2) şəklində ifadə olunur:

$$Z_{KXD} = e^{\frac{iS_q(P((x,z)))}{t}} \quad (2)$$

Holoqrafik prinsip iç nəzəriyyənin  $Z_{AdS}$  funksiyası ilə sərhəd KXD-nin  $Z_{KXD}$  funksiyasını eyniləşdirir [6]:

$$Z_{AdS} = Z_{KXD}$$

Digər tərəfdən məlumdur ki, AdS fəzasının sərhəddində 4-ölçülü vektor cərəyan törədici funksionalın ultrabənövşəyi sərhəddəki 4-ölçülü sahənin

vakuum qiymətinə görə funksional törəməsinə bərabərdir.

$$\langle J_\mu \rangle = -i \frac{\delta Z_{KXD}}{\delta \bar{p}_\mu^0} \Big|_{\bar{p}_\mu^0=0} \quad (3)$$

Burada,  $J_\mu$  üçün pion sahəsinin cərəyanı olub,  $\pi$  mezon- proton-barion qarşılıqlı təsir sabiti vasitəsilə (4) şəklində ifadə olunur:

$$J_\mu(p', p) = g_{\pi NN} \bar{u}(p') \gamma^5 u(p) \quad (4)$$

Burada  $p'$  və  $p$  AdS fəzasının daxilindəki spinor sahələrin vektor sahə ilə qarşılıqlı təsirindən əvvəl və sonrakı impulslarıdır.

### Pion-nuklon qarşılıqlı təsir sabiti

AdS fəzasının daxilində fermion sahələrinin psevdoskalyar sahə ilə qarşılıqlı təsir Laqranjiani Yukava qarşılıqlı təsir Laqranjiani ilə təsvir olunur [2]:

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = -g_Y [\bar{N}_1 X N_2 + \bar{N}_2 X^+ N_1]. \quad (5)$$

Burada,  $g$ -Yukava sabitidir, ədədi qiyməti  $g=14.4$ -dür.  $N_1$  və  $N_2$  5-ölçülü spinorlardır:

$$N(p, z) = N_{iL} + N_{iR} \quad (6)$$

İmpuls fəzasında 5-ölçülü spinorlar Furry çevirməsi vasitəsilə (7) şəklində təyin olunur:

$$N_{iL,R}(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p F_{iL,R}(p, z) \psi_{L,R}(p) e^{-ipx}. \quad (7)$$

Burada,  $F_{iL,R}$  profil funksiyalarıdır [7].

$z \rightarrow 0$  limit qiymətində  $X$  üçün asimptotik həll aşağıdakı şəkildədir:

$$X(z) \approx \frac{1}{2} a m_q z + \frac{1}{2a} \sigma z^3 \quad (8)$$

Burada,  $m_q$ - u və  $d$  kvarkların kütləsi,  $\sigma$ -isə kiral kondensatın qiymətidir. Kiral limit halında, yəni  $M \rightarrow 0$  olduqda  $X(z) = v(z) e^{iP(x,z)}$  kimi yazıla bilər.

$P(x,z)$ -pion sahəsidir. Kiral limit halında, holqrafik dalğa funksiyası vasitəsilə pion sahəsinin ədədi qiyməti hesablanmışdır [9].

Oktet barionlara daxil olan elementar zərrəciklərin ( $p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi$ ) hər biri üçün  $v(z)$ -in riyazi ifadəsi hesablanmışdır [9]. Nuklon üçün  $v(z)$  aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur:

$$v(z) = (3c_2 - c_1) v_u(z) \quad (9)$$

Burada,  $v_u(z) = m_u z + \sigma_u z^3$   $m_u, \sigma_u$ -uyğun olaraq  $u$  kvarkının kütləsi və kiral kondensasiyasıdır.

(5), (2), (3) düsturlarını (1) təsirində nəzərə alaraq (4) ifadəsinin üzərində müəyyən riyazi hesablamalar apardıqdan sonra pion-nuklon qarşılıqlı təsir sabitinin analitik ifadəsi aşağıdakı kimidir :

$$g_{\pi N} = v(z)P_{\pi}g_Y(f_{2L}f_{1R} - f_{2R}f_{1L} - f_{1L}f_{2R}^* + f_{1R}^*f_{2L}^*)$$

### Ədədi hesablama

Bu işdə, oktet barion olaraq proton (neytron) götürülərək  $\pi$  mezon proton (neytron) oktet-barion qarşılıqlı təsir sabiti hesablanmışdır. Hesablama MATHEMATİCA11 proqramı əsasında aparılmışdır.

Parametrlər toplusu üçün aşağıdakı qiymətlər götürülür:

$m_{\pi}=0.14$  (GeV),  $\sigma =(0.198\text{GeV})^3$ ,  $m_u = 0$ ,  $z_m = (205\text{MeV})^{-1}$  . Bu qiymətləri (9) ifadəsində nəzərə alaraq nuklon  $v(z)$  üçün  $v(z) = (3c_2 - c_1)$   $v_u(z)=14.8$  ədədi qiyməti alınmışdır.

Sabitlərin bu qiymətləri nəzərə alınaraq yekun hesablamalar nəticəsində pion-nuklon qarşılıqlı təsir sabiti  $-g_{\pi N}=1,065$  qiymətini verir. Pion-nuklon qarşılıqlı təsir sabiti üçün təcrübi qiymət  $-g_{\pi N}=0.939$ -dur.

Bu nəticənin təcrübi qiymətə uyğun olması göstərir ki, AdS\KXD-nin sərt divar modeli çərçivəsində elementar zərrəciklərin qarşılıqlı təsir sabitlərini hesablamaq məqsədəuyğundur.

### ƏDƏBİYYAT

1. Horaiu Nstase Introduction to the AdS\CFT correspondence Cmbridge University Press (2016)
2. Hong D., Inami T. and Yee H. Baryons in AdS/QCD // Physics Letters B, 2007, v.646, p.165-171
3. J.Leutgeb, J.Mager and A. Rebhan “Pseudoscalar transition form factors and the hadronic light-by-light contribution to the anomalous magnetic moment of the muon from holographic QCD” arxiv 1906.11795v2 (hep-ph)
4. K.A.Olive et al.( Particle Data Group Collaboration), Chin PHYS. C38. 090001(2009)
5. Maia M.The Extended ADS/CFT Correspondence // Braz.J.Phys., 2005, v.35, pp. 1142-1144
6. Makoto Natsuume ADS/CFT Duality User Guide,Lecture Notes in Physics 903, Springer.
7. Shahin Mamedov, Shahnaz Taghiyeva “Meson-nucleon coupling constant from the AdS\QCD” models GESJ Physics 2018 №2(20)
8. Witten E. , Anti-de Sitter space and holography // Adv.Theor.Math.Phys., 1998, v.2, pp. 253-291
9. Zhen Fang Phys. Rev. D 94. 074017(2016)
10. Zhang P. Improving the excited nucleon spectrum in hard-wall AdS/QCD // Phys. Rev. D, 2010, v.81, №11, p. 114029

# РАСЧЕТ КОНСТАНТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ $\pi$ МЕЗОНА С НУКЛОНОМ В МОДЕЛИ ЖЕСТКОЙ СТЕНЫ АдС/КХД

Ш.И.ТАГИЕВА

## РЕЗЮМЕ

В рамках модели жесткой стены АдС/КХД мы вычислили константу взаимодействия  $\pi$  мезон–протон. Во внутренней части АдС пространства Юкава лагранжиан взаимодействия полями было использовано. Используя АдС/КТП соответствие интегральное выражение получено для константы пион протонного взаимодействия и его численное значение было рассчитано.

**Ключевые слова:** Пространство Анти-де-Ситтера, мезон, нуклон, профильная функция

# CALCULATION OF THE $\pi$ MESON-NUCLEON COUPLING CONSTANT IN THE HARD WALL OF AdS/QCD MODEL

Sh.I.TAGIYEVA

## SUMMARY

In the framework of the hard wall model of AdS/QCD we calculated the  $\pi$  meson proton coupling constant. The Yukawa interaction Lagrangian fields was used in the bulk of AdS space. Using the AdS/CFT correspondence an integral expression was found for the pion proton coupling constant and its numerical value was calculated.

**Key words:** Anti-de Sitter space, meson, nucleon, profile function.

## MÜNDƏRİCAT

## RİYAZİYYAT

**Əliyev S.C., Əliyeva A.Q.**

Bir sinif üçüncü tərtib qeyri-xətti diferensial tənliklər üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələnin tədqiqi ..... 5

**Süleymanov N.S.**

Sərhəd şərtində parametr olan Steklov tipli məsələlərin ədədi üsulla həlli ..... 15

**Əliyeva S.T.**

Bərabərsizlik tip funksional məhdudiyət olan bir sərhəd optimal idarəetmə məsələsində məxsusi halın tədqiqi ..... 20

**Əhmədov S.Z.**

Antiperiodik sərhəd şərtli bir qarışıq məsələnin həllinin tapılması haqqında ..... 35

**Tağıyeva M.Ə.**

Ümümləşmiş analitik funksiyaların çoxhədlilərlə yaxınlaşması haqqında ..... 42

**Kərimova A.V.**

Gecikməyə malik Volterra tip xətti fərq tənliyinin həllinin göstərilişi haqqında ..... 51

**Quliyev H.F., Səfərova Z.R.**

Bir ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün ən tez təsir məsələsi ..... 55

## MEXANİKA

**Xəlilov M.S.**

Suyun təcrid yerinin neftin sıxışdırılma əmsalına təsirinin proqnozu ..... 68

**Nağıyeva N.B.**

Zərbədən yaranan həyəcanlanmaların təsiri altında emulsiyalarının ayrılma proseslərinin tədqiqi ..... 80

**Qasimov H.**

Dairəvi en kəsiyinə malik olan silindrik örtüyün məxsusi rəqsi haqqında ..... 86

## FİZİKA

**İsmayılov T.H., Aslanlı A.F.**

Nanosilindrde elektron qazının əsas halı ..... 91

**Həsənov A.Q.**

Metal oksid tərkibli bəzi nanohissəciklərin mexaniki xassələrinin kvant mexaniki tədqiqi ..... 95

**Tağıyeva Ş.İ.**

Pion nuklon qarşılıqlı təsir sabitinin  $AdS/KXD$ -nin sərt divar modelində hesablanması ..... 102

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

**Алиев С.Дж., Алиева А.Г.**  
Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка ..... 5

**Сулейманов Н.С.**  
Численные методы решение задач с параметром в краевых условиях..... 15

**Алиева С.Т.**  
Исследование особого случая в одной граничной задача оптимального управления при наличии функциональных ограничений типа неравенств ..... 20

**Ахмедов С.З.**  
О решение одной смешенной задачи с анти периодическим граничным условиям ..... 35

**Тагиева М.А.**  
О скорости полиномиальной аппроксимации обобщенных аналитических функций ..... 42

**Керимова А.В.**  
О представлении решения линейного разностного уравнения типа Вольтерра с запаздыванием ..... 51

**Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.**  
Задача быстродействия относительно одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка ..... 55

МЕХАНИКА

**Халилов М.С.**  
Прогноз влияния места водоизоляции на коэффициент сжатия нефти ..... 68

**Нагиева Н.Б.**  
Исследование процессов отделения эмульсий под воздействием возмущения, вызванного ударной нагрузкой..... 80

**Гасымов Г.**  
О собственном колебании неоднородной цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения ..... 86

ФИЗИКА

**Исмаилов Т.Г., Асланлы А.Ф.**  
Основное состояние электронного газа в наноцилиндре ..... 91

**Гасанов А.Г.**  
Изучение механических свойств некоторых метал сульфид содержащий наночастиц с квантовомеханическими методами ..... 95

**Тагиева Ш.И.**  
Расчет константа взаимодействия  $\pi$  мезона с нуклоном в модели жесткой стены АдС/КХД ..... 102



## CONTENTS

## MATHEMATIC

**Aliyev S.J., Aliyeva A.Q.**

The study of multidimensional mixed problem for one class of third order nonlinear differential equations ..... 5

**Suleymanov N.S.**

The analytical solution of tasks with spectral parameter in regional conditions by means of numerical methods ..... 15

**Aliyeva S.T.**

Research of a special case in one boundary problem of optimal management in the presence of functional limitations of type of inequalities ..... 20

**Ahmadov S.Z.**

About the solution of one mixed problem with an antiperiodic boundary condition ..... 35

**Tagiyeva M.A.**

On degree of polynomial approximations of generalized analytic functions ..... 42

**Karimova A.V.**

On the representation solution the Volterra type delay time linear difference equation ..... 51

**Guliyev H.F., Safarova Z.R.**

The speedaction problem for the one nonlinear second-order hyperbolic equation ..... 55

## MECHANIC

**Khalilov M.S.**

Forecast of water insulation in places of oil conservation ..... 68

**Naghiyeva N.B.**

Investigation of the processes of separation of emulsions under the influence of perturbation caused by shock ..... 80

**Gasimov H.**

On the eigen oscillation of annular cross section inhomogeneous cylindrical shell ..... 86

## PHISIC

**Ismayilov T.H., Aslanli A.F.**

Ground state of electronic gas in nanocylinder ..... 91

**Gasanov A.G.**

Studing mechanical properties some metal okside containing nanoparticles by quantum methods ..... 95

**Tagiyeva Sh.I.**

Calculation of the  $\pi$  meson-nucleon coupling constant in the hard wall of AdS/QCD model ..... 102